Minimaxprinzipe für stark gedämpfte Scharen

Von ROLF KÜHNE in Dresden (DDR)*)

0. Einleitung

Es sei $\mathfrak{H}$ ein komplexer [1]) Hilbertraum, versehen mit dem Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$, und es seien A, B, C auf $\mathfrak{H}$ definierte selbstadjungierte beschränkte Operatoren. Wir betrachten die für jede komplexe Zahl λ durch

$$L(\lambda)=\lambda^2 A+\lambda B+C \tag{0. 1}$$

definierte Schar L unter folgender Voraussetzung:

(D) Die Schar L sei *stark gedämpft*, d. h., es gelte

$$(Bx, x)^2 > 4(Ax, x)(Cx, x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0.$$

(Zur Terminologie vgl. [1], [2] und [4].)

Die benötigten Voraussetzungen, Definitionen und einfache sich daraus ergebende Folgerungen enthält Abschnitt 2.

Abschnitt 3 beschäftigt sich mit den für L (durch (2. 2), (2. 3)) definierten Funktionalen erster und zweiter Art (sog. verallgemeinerte Rayleigh-Quotienten, s. [1]).

In Abschnitt 4 betrachten wir das Spektrum der Schar L. Mit Hilfe der Funktionale erster und zweiter Art werden für das Folgende wesentliche Teile des Spektrums, das sog. Spektrum erster bzw. zweiter Art, ausgesondert und näher behandelt.

Das eigentliche Ziel der Untersuchungen ist der Inhalt des Abschnittes 5, wo unter gewissen Voraussetzungen an das Spektrum der Schar L Minimaxprizipe für die Bestimmung sog. Eigenwerte erster (bzw. zweiter) Art und zugehöriger Eigenelemente angegeben werden (Sätze 5. 1 und 5. 2). Ergebnisse dieser Art erhielt

---

*) Diese Arbeit ist im wesentlichen Teil einer Dissertation. Herrn Prof. Dr. P. H. MÜLLER, Dresden, bin ich für seine stete Unterstützung, ihm und Herrn Prof. Dr. M. A. NEUMARK, Moskau, außerdem für die Übernahme der Referate zu großem Dank verpflichtet.

[1]) Die folgenden Untersuchungen bleiben mutatis mutandis auch in reellen Räumen gültig. Eine gewisse Ausnahmestellung nehmen dabei reelle Räume der Dimension 2 ein. An entsprechender Stelle wird darauf hingewiesen.

erstmals R. J. DUFFIN [1], [2] unter zusätzlichen Voraussetzungen in endlichdimensionalen Räumen (Näheres s. Ende des Abschnittes 6); die dort benutzten Methoden beruhen aber großenteils auf charakteristischen Eigenschaften endlichdimensionaler Räume und sind deshalb auf den hier betrachteten allgemeinen Fall im wesentlichen nicht übertragbar.

Anwendungen der Minimaxprinzipe auf Scharen speziellen Typs erfolgen in Abschnitt 6 (Sätze 6. 1 und 6. 2), wobei sich als Spezialfall die Aussagen von [1] bzw. [2] ergeben.

Schließlich sind in Abschnitt 1 einige für unsere Untersuchungen wesentliche Beziehungen zwischen quadratischen Formen, deren Nullkegel nur das Nullelement des Raumes gemeinsam haben, vorangestellt.

Es sei noch erwähnt, daß Teile der vorgelegten Ergebnisse anfangs über Zusammenhänge gewisser Scharen mit speziellen J-selbstadjungierten Operatoren (zur Terminologie s. [4], [5]) gewonnen wurden. Genauer gesagt läßt sich einer Schar L z. B. unter den zusätzlichen Voraussetzungen $A=I$ und $(Bx, x)\geqq 0$, $(Cx, x)\geqq 0$ $(x\in\mathfrak{H})$ in einem geeignet gewählten J-Raum ein J-selbstadjungierter Operator T zuordnen, dessen von 0 verschiedenes Spektrum mit dem von 0 verschiedenen Spektrum der Schar L übereinstimmt (eine solche Linearisierung wurde von M. G. KREIN und H. LANGER in [4] beim Studium der Operatorgleichung $Z^2+BZ+C=0$ betrachtet und ist einer entsprechenden von P. H. MÜLLER ([6], [7]) unter der Voraussetzung $(Cx, x)\leqq 0$ $(x\in\mathfrak{H})$ verwendeten Linearisierung analog; der Verfasser verdankt Herrn Prof. DR. H. LANGER, Dresden, den Hinweis auf solche Zusammenhänge sowie auf die Arbeiten [1] und [2]).

Wie H. LANGER bemerkte, gehört der Operator T genau dann zu der in [5] betrachteten Operatorenklasse, wenn L stark gedämpft ist. Wird zusätzlich gefordert, daß C vollstetig ist, so gelangt man dann unter teilweiser Benutzung der in [5] angegebenen Aussagen und Methoden auch auf diesem Wege der Linearisierung zu Spezialfällen unserer Ergebnisse.

1. Quadratische Formen

Dieser Abschnitt enthält unmittelbare Verallgemeinerungen der Lemmata 1. 1 und 1. 2 aus [5].

Es sei $\mathfrak{E}$ ein komplexer linearer Raum. Unter einer *hermetischen Bilinearform* auf $\mathfrak{E}$ versteht man eine Abbildung a von $\mathfrak{E}\times\mathfrak{E}$ in die Menge der komplexen Zahlen mit den Eigenschaften

$$a(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y)=\lambda_1 a(x_1, y)+\lambda_2 a(x_2, y)$$
$$a(x, y)=\overline{a(y, x)}$$

für beliebige komplexe λ_1, λ_2 und $x_1, x_2, x, y\in\mathfrak{E}$.

Die durch $a(x, x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ auf $\mathfrak{E}$ definierte (reellwertige) Funktion heißt die zu a gehörige *quadratische Form*. Die Menge

$$\mathfrak{a}^0 = \{x \in \mathfrak{E} \mid a(x, x) = 0\}$$

nennen wir deren *Nullkegel*.

Lemma 1. 1. [2]) *Es seien a und b zwei hermetische Bilinearformen, wobei zwischen den Nullkegeln $\mathfrak{a}^0$ und $\mathfrak{b}^0$ der zugehörigen quadratischen Formen die Bedingung*

$$\mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{b}^0 = \{0\} \tag{1. 1}$$

bestehe. Dann gilt eine der beiden Relationen

$$a(x, x) > 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{b}^0 \setminus \{0\} \tag{1. 2}$$

oder

$$a(x, x) < 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{b}^0 \setminus \{0\}. \tag{1. 3}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{b}^0$ mit $a(x, x) < 0$ und $a(y, y) > 0$. Dann ließe sich eine reelle Zahl φ und danach ein reelles $\alpha \neq 0$ so wählen, daß $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} b(x, y)) = 0$ und $a(x, x) + 2\alpha \operatorname{Re}(e^{i\varphi} a(x, y)) + \alpha^2 a(y, y) = 0$ gilt. Für $z_0 = x + \alpha e^{i\varphi} y$ folgt daraus $z_0 \in \mathfrak{a}^0 \cap \mathfrak{b}^0$ und wegen $a(x, x) < 0$ und $a(y, y) > 0$ aber auch $z_0 \neq 0$ im Widerspruch zu (1. 1).

Lemma 1. 2. [3]) *a und b seien zwei hermitesche Bilinearformen; dabei sei die quadratische Form $b(x, x)$ $(x \in \mathfrak{E})$ streng indefinit, und es gelte für alle $z \in \mathfrak{b}^0 \setminus \{0\}$ die Ungleichung $a(z, z) > 0$. Dann ist für alle $x \in \mathfrak{E}$ mit $b(x, x) > 0$ und alle $y \in \mathfrak{E}$ mit $b(y, y) < 0$*

$$\frac{a(y, y)}{b(y, y)} < \frac{a(x, x)}{b(x, x)}. \tag{1. 4}$$

Ferner gilt $\mu = \inf\limits_{b(x, x) > 0} \dfrac{a(x, x)}{b(x, x)} > -\infty$, *und es ist*

$$a(z, z) \geqq \mu b(z, z) \qquad (z \in \mathfrak{E}). \tag{1. 5}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei Elemente $x_0, y_0 \in \mathfrak{E}$ mit $b(x_0, x_0) = -b(y_0, y_0) = 1$ und $-a(y_0, y_0) \geqq a(x_0, x_0)$. Wählt man dann eine reelle Zahl φ, für die $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} b(x_0, y_0)) = 0$ und $\operatorname{Re}(e^{i\varphi} a(x_0, y_0)) \leqq 0$ gilt, so ergeben sich für $z_0 = e^{i\varphi} x_0 + y_0$ die Beziehungen $z_0 \in \mathfrak{b}^0 \setminus \{0\}$ und $a(z_0, z_0) \leqq 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

---

[2]) Der Inhalt dieses Lemmas ist in [8], Satz 1.1 enthalten.

[3]) Eine entsprechende Aussage unter etwas allgemeineren Voraussetzungen wurde (in Verallgemeinerung von Lemma 1. 2 aus [5]) in Theorem 1. 1 der folgenden Arbeit bewiesen: M. G. Krein und Ju. L. Šmuljan, Über Plus-Operatoren in einem Raum mit indefiniter Metrik, *Mat. issledovanija Akad. Nauk Moldavskoi SSR*, Kišinev **1** (1) (1966), 131—161 [russ.].

Aus (1. 4) folgt $\mu > -\infty$. Schließlich gilt die Ungleichung (1. 5) für alle $z \in \mathfrak{E}$, da sie nach Definition für $b(z, z) > 0$, auf Grund der Voraussetzung für $b(z, z) = 0$ und infolge (1. 4) für $b(z, z) < 0$ erfüllt ist.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{E}$ ein reeller Raum, so bleibt Lemma 1. 2 in vollem Umfang gültig, Lemma 1. 1 hingegen nur unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $\mathfrak{E}$ eine von 2 verschiedene Dimension besitzt (vgl. [8], Satz 1. 1).

2. Voraussetzungen und Definitionen

Nach den vorbereitenden Betrachtungen des Abschnittes 1 in beliebigen komplexen linearen Räumen kehren wir zu den in der Einleitung formulierten Voraussetzungen zurück. Es seien also $\mathfrak{H}$ ein komplexer Hilbertraum, L eine durch (0. 1) auf $\mathfrak{H}$ definierte Schar, die der Bedingung (D) der starken Dämpfung genüge.

Eine einfache Konsequenz von (D) enthält

Lemma 2. 1. *Genügt die Schar L der Bedingung* (D), *so gilt eine der folgenden Relationen:*

$$(Bx, x) > 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0, \quad \textit{mit} \quad (Ax, x) = 0$$

oder

$$(Bx, x) < 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0, \quad \textit{mit} \quad (Ax, x) = 0.$$

Beweis. Aus (D) folgt, daß die quadratischen Formen (Bx, x) $(x \in \mathfrak{H})$ und (Ax, x) $(x \in \mathfrak{H})$ die Bedingung (1. 1) erfüllen. Also liefert Lemma 1. 1 die Behauptung.

Für alles Weitere setzen wir nun anstelle von (D) die Gültigkeit der Bedingung

(D^+) Die Schar L genüge der Bedingung (D), und es gelte

$$(Bx, x) > 0 \quad \text{für jedes} \quad x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0, \quad \text{mit} \quad (Ax, x) = 0.$$

voraus, was insofern keine weitere Einschränkung bedeutet, als nach Lemma 2. 1 unter der Voraussetzung (D) entweder L oder $-L$ sogar der Bedingung (D^+) genügt.

An dieser Stelle soll der Fall reeller Hilberträume erwähnt werden. Die soeben vorgenommene Ersetzung der Bedingung (D) durch (D^+) beruhte auf Lemma 2. 1 und nach dessen Beweis also auf Lemma 1. 1, das im reellen Fall — wie bereits vermerkt — unter der zusätzlichen Voraussetzung $\dim \mathfrak{H} \neq 2$ richtig bleibt. Somit ist alles bisher Gesagte auch für reelle Räume einer von 2 verschiedenen Dimension gültig. Bei $\dim \mathfrak{H} = 2$ ist die Bedingung (D^+) i. a. tatsächlich stärker als (D). Dies ist jedoch der einzige hier auftretende Unterschied zwischen reellen und komplexen Räumen. Alles Weitere gilt vollinhaltlich auch im reellen Fall.

Wir setzen nun abkürzend

$$d(x) = \sqrt{(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x)}.$$

Nach der Voraussetzung (D^+) gilt dann

$$d(x) > 0 \qquad (x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0). \tag{2.1}$$

Eine entscheidende Rolle spielen im weiteren die Funktionale

$$p(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(Ax,x)}[(Bx,x)-d(x)] & x\in\mathfrak{H},\quad (Ax,x)\neq 0 \\ -\dfrac{(Cx,x)}{(Bx,x)} & x\in\mathfrak{H},\quad x\neq 0,\quad (Ax,x)=0, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(Ax,x)}[(Bx,x)+d(x)] & x\in\mathfrak{H},\quad (Ax,x)\neq 0 \\ \infty\ ^{4)} & x\in\mathfrak{H},\quad x\neq 0,\quad (Ax,x)=0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dabei heiße p *Funktional erster Art* und s *Funktional zweiter Art* von L (zur Definition und Terminologie s. [1]). Offenbar gilt

$$\left.\begin{aligned} p(\varrho x) &= p(x) \\ s(\varrho x) &= s(x) \end{aligned}\right\} \quad (x\in\mathfrak{H},\ x\neq 0;\ \varrho\neq 0 \ \text{ beliebig komplex}). \tag{2.4}$$

Wir definieren noch für jede (komplexe) Zahl λ

$$f_\lambda(x) = (\lambda + p(x))(Ax,x) + (Bx,x) \qquad (x\in\mathfrak{H},\ x\neq 0) \tag{2.5}$$

und fassen nun die unmittelbar aus den Definitionen folgenden Eigenschaften von p, s und f_λ in den folgenden beiden Lemmata zusammen.

Lemma 2. 2. *Für eine beliebige (komplexe) Zahl λ und beliebiges $x\in\mathfrak{H}$, $x\neq 0$ gilt*

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} (Bx,x) & \textit{falls} \quad (Ax,x)=0 \\ (Ax,x)(\lambda - s(x)) & \textit{falls} \quad (Ax,x)\neq 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$f_\lambda(x) \neq 0 \quad \textit{genau dann, wenn} \quad \lambda \neq s(x), \tag{2.7}$$

$$(L(\lambda)x, x) = (\lambda - p(x)) f_\lambda(x). \tag{2.8}$$

Beweis. Ist $(Ax,x)\neq 0$, so folgt aus (2. 2) und (2. 3)

$$p(x)+s(x) = -\frac{(Bx,x)}{(Ax,x)}$$

4) Unter ∞ sei im folgenden stets der die komplexe Zahlenebene (im Sinne von ALEXANDROFF) bikompaktifizierende Punkt zu verstehen. Außerdem wollen wir diesen Punkt als reell definieren.

und somit

$$f_\lambda(x) = \left(\lambda - \frac{(Bx, x)}{(Ax, x)} - s(x)\right)(Ax, x) + (Bx, x) = (Ax, x)\big(\lambda - s(x)\big),$$

also (2. 6). Im Falle $(Ax, x) = 0$ ergibt sich (2. 6) direkt aus (2. 5).

(2. 7) erhält man aus (2. 6) unter Berücksichtigung der Bedingung (D^+).

(2. 6), (2. 2) und (2. 3) ergeben auf bekannte Weise (2. 8).

Lemma 2. 3. *Für ein (komplexes) λ_0 und ein $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$, besteht genau dann die Gleichung $(L(\lambda_0)x, x) = 0$, wenn eine der Beziehungen $p(x) = \lambda_0$ oder $s(x) = \lambda_0$ gilt.*

Ferner ist

$$(2.9) \qquad \left.\frac{d(L(\lambda)x, x)}{d\lambda}\right|_{\lambda = p(x)} = f_{p(x)}(x) = 2p(x)(Ax, x) + (Bx, x) > 0 \quad (x \in \mathfrak{H}, x \neq 0),$$

$$(2.10) \qquad \left.\frac{d(L(\lambda)x, x)}{d\lambda}\right|_{\lambda = s(x)} = 2s(x)(Ax, x) + (Bx, x) < 0 \quad \big(x \in \mathfrak{H}, (Ax, x) \neq 0\big)$$

und

$$(2.11) \qquad p(x) \neq s(x) \quad (x \in \mathfrak{H}, x \neq 0).$$

Beweis. Die erste Behauptung des Lemmas gilt offensichtlich.

Die Beziehungen (2. 9) und (2. 10) ergeben sich im Falle $(Ax, x) \neq 0$ daraus, daß per definitionem $f_{p(x)}(x) = 2p(x)(Ax, x) + (Bx, x) = d(x) > 0$ und $2s(x)(Ax, x) + (Bx, x) = -d(x) < 0$ gilt. Ist $(Ax, x) = 0$, so folgt aus (D^+) $f_{p(x)}(x) = (Bx, x) > 0$.

(2. 11) erhält man aus (2. 9) und (2. 10).

3. Die Funktionale p und s

Die folgenden Lemmata enthalten Eigenschaften von p und s. Dabei beschränken wir uns im wesentlichen auf die Betrachtung des Funktionals p, da sich Aussagen über p unmittelbar auf s übertragen lassen, wie in Lemma 3. 6 gezeigt wird.

Lemma 3. 1. *Das Funktional p ist auf $\mathfrak{H} \setminus \{0\}$ stetig.*

Beweis. Für jedes $x \in \mathfrak{H}$ mit $(Ax, x) \neq 0$ existiert wegen der Stetigkeit von A eine Umgebung von x, für deren Elemente z ebenfalls $(Az, z) \neq 0$ gilt. Die Stetigkeit von p in x ergibt sich dann nach (2. 2) aus der Stetigkeit von A, B und C.

Ist $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$ und $(Ax, x) = 0$, so gilt wegen (D^+) die Ungleichung $(Bx, x) > 0$. Folglich gibt es eine Umgebung U von x mit $(Bz, z) > 0$ für alle $z \in U$.

Nun gilt nach (2. 2) für alle $z \in U$

$$[(Bz, z) + d(z)]p(z) = -2(Cz, z)$$

und daher unter Beachtung von $(Bz, z)>0$ und (2. 1)

$$p(z) = -\frac{2(Cz,z)}{(Bz,z)+d(z)} \qquad (z\in U).$$

Also ist auch dann p in x stetig, w. z. z. w.

Wir definieren für jede reelle Zahl ϱ die Operatoren

$$T_\varrho = \varrho^2 A - C$$

$$R_\varrho = 2\varrho A + B$$

und setzen

$$\mathsf{P} = \{\varrho \mid \varrho \quad \text{reell, für jedes} \quad x\in\mathfrak{H} \quad \text{mit} \quad (R_\varrho x, x)=0 \quad \text{gilt} \quad (Ax, x)\geqq 0\}.$$

Lemma 3. 2. *Die quadratische Form (Ax, x) $(x\in\mathfrak{H})$ sei streng indefinit. Dann existiert eine reelle Konstante μ mit*

$$(3.\,1) \qquad (Bx, x)\geqq \mu(Ax, x) \qquad (x\in\mathfrak{H}).$$

Beweis. Wegen (D^+) genügen die quadratischen Formen (Bx, x) $(x\in\mathfrak{H})$ und (Ax, x) $(x\in\mathfrak{H})$ den Voraussetzungen zu Lemma 1. 2. Daher folgt aus (1. 5) mit $\mu = \inf\limits_{(Ax,x)>0} \frac{(Bx, x)}{(Ax, x)}$ die Beziehung (3. 1).

Folgerung 1. *Für alle $x\in\mathfrak{H}$ mit $(Ax, x)>0$ gilt*

$$s(x) < -\frac{\mu}{2}.$$

Beweis. Wegen (3. 1) ist für jedes $x\in\mathfrak{H}$ mit $(Ax, x)>0$

$$s(x) = -\frac{1}{2(Ax,x)}[(Bx,x)+d(x)] \leqq -\frac{\mu}{2}-\frac{d(x)}{2(Ax,x)} < -\frac{\mu}{2}$$

Folgerung 2. *Für jedes reelle $\varrho < -\frac{\mu}{2}$ gilt $\varrho\in\mathsf{P}$.*

Beweis. Es sei $\varrho < -\frac{\mu}{2}$. Für jedes $x\in\mathfrak{H}$ mit $2\varrho(Ax, x)+(Bx, x) = (R_\varrho x, x)=0$ folgt aus (3. 1)

$$2\left(-\frac{\mu}{2}-\varrho\right)(Ax, x) = -\mu(Ax, x)+(Bx, x) \geqq 0,$$

also

$$(Ax, x)\geqq 0.$$

Somit gilt $\varrho\in\mathsf{P}$.

Lemma 3. 3. *Sei* $\varrho \in \mathrm{P}$. *Dann gilt für jedes* $x \in \mathfrak{H}$ *mit* $(R_\varrho x, x) > 0$ *und jedes* $y \in \mathfrak{H}$ *mit* $(R_\varrho y, y) < 0$ *die Ungleichung*

$$\frac{(T_\varrho y, y)}{(R_\varrho y, y)} < \frac{(T_\varrho x, x)}{(R_\varrho x, x)}. \tag{3.2}$$

Beweis. Es sei z ein Element aus $\mathfrak{H}$ mit $(R_\varrho z, z) = 0$ und $(T_\varrho z, z) \leqq 0$. Aus $(R_\varrho z, z) = 0$ folgt $(Bz, z)^2 = 4\varrho^2(Az, z)^2$ und wegen $\varrho \in \mathrm{P}$ $(Az, z) \geqq 0$. Dies liefert unter Benutzung von $\varrho^2(Az, z) - (Cz, z) = (R_\varrho z, z) \leqq 0$ die Beziehung

$$(Bz, z)^2 \leqq 4(Az, z)(Cz, z).$$

Also gilt nach (D^+) $z = 0$. D. h., für die quadratischen Formen $(T_\varrho z, z)$ und $(R_\varrho z, z)$ sind die Voraussetzungen zu Lemma 1. 2 erfüllt. (3. 2) ergibt sich somit aus (1. 3).

Genauere Auskunft über die Wertebereiche von p und s gibt nun

Lemma 3. 4. [5]) *Es sei* $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$, *beliebig. Dann gilt*

$$s(y) < p(x), \quad \textit{falls} \quad y \in \mathfrak{H} \quad \textit{und} \quad (Ay, y) > 0 \tag{3.3}$$

und

$$s(y) > p(x), \quad \textit{falls} \quad y \in \mathfrak{H} \quad \textit{und} \quad (Ay, y) < 0. \tag{3.4}$$

Beweis. (1) Wir beweisen zunächst (3. 3). Angenommen, es gäbe zwei von 0 verschiedene Elemente $x, y \in \mathfrak{H}$, so daß

$$(Ay, y) > 0 \quad \text{und} \quad s(y) \geqq p(x) \tag{3.5}$$

gilt. Wir setzen $\varrho = p(x)$.

Fall 1: Die Form (Ax, x) $(x \in \mathfrak{H})$ sei streng indefinit. Dann gilt nach Folgerung 1 aus Lemma 3. 2 $p(x) \leqq s(y) < -\dfrac{\mu}{2}$, also wegen Folgerung 2 aus Lemma 3. 2 $\varrho = p(x) \in \mathrm{P}$.

Fall 2: Die Form (Ax, x) $(x \in \mathfrak{H})$ sei (semi-)definit. Auf Grund von $(Ay, y) > 0$ ist dann $(Ax, x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{H})$. Somit gilt wieder $\varrho = p(x) \in \mathrm{P}$.

Folglich läßt sich Lemma 3. 3 anwenden.

Nun ist nach (2. 9)

$$(R_\varrho x, x) = f_\varrho(x) = f_{p(x)}(x) > 0$$

und wegen $(Ay, y) > 0$ und $s(y) \geqq p(x) = \varrho$ nach (2. 10)

$$(R_\varrho y, y) = 2\varrho(Ay, y) + (By, y) \leqq 2s(y)(Ay, y) + (By, y) < 0.$$

---

[5]) Dieses Lemma ist für $\dim \mathfrak{H} < \infty$ und $(Bx, x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{H})$ in [1] enthalten. Die hier allgemeiner formulierte Aussage läßt sich (abweichend vom obigen Beweis) im Prinzip auch durch (schrittweise) Reduktion auf diesen Spezialfall nachweisen.

Daher ergibt die Beziehung (3. 2) des Lemmas 3. 3 die Ungleichung

$$(3.6)\qquad \frac{(T_\varrho y, y)}{(R_\varrho y, y)} < \frac{(T_\varrho x, x)}{(R_\varrho x, x)}.$$

Wir benutzen nun die für alle $z \in \mathfrak{H}$ gültige Gleichung

$$(3.7)\qquad (T_\varrho z, z) = \varrho^2(Az, z) - (Cz, z) = 2\varrho^2(Az, z) + \varrho(Bz, z) - (L(\varrho)z, z) = \\ = \varrho(R_\varrho z, z) - (L(\varrho)z, z).$$

Da nach Definition für $\varrho = p(x)$ die Gleichung $(L(\varrho)x, x) = 0$ gilt, liefert (3. 7) mit $z = x$

$$(T_\varrho x, x) = \varrho(R_\varrho x, x).$$

(3. 6) vereinfacht sich so zu

$$(3.8)\qquad \varrho(R_\varrho y, y) - (T_\varrho y, y) < 0.$$

(3. 7), mit $z = y$ in (3. 8) eingesetzt, ergibt dann

$$(3.9)\qquad (L(\varrho)y, y) < 0.$$

Andererseits folgt aber aus (2. 2) und (2. 3) $p(y) - s(y) = \dfrac{d(y)}{(Ay, y)} > 0$, also unter Beachtung von (3. 5)

$$p(y) > s(y) \geqq \varrho.$$

(2. 6) und (2. 8) liefern so zusammen mit (3. 5) die Ungleichung

$$(L(\varrho)y, y) \geqq 0$$

im Widerspruch zu (3. 9).

(2) (nach [1]) Zum Beweis von (3. 4) betrachten wir die Schar $L^-(\lambda) = \lambda^2 A^- + \lambda B^- + C^-$ mit $A^- = -A$, $B^- = B$, $C^- = -C$, die offenbar wieder der Bedingung (D^+) genügt. Die Anwendung von Teil (1) des Beweises auf L^- liefert dann (3. 4).

Folgerung 1. *Es sei μ eine reelle Zahl, zu der Elemente $x, y \in \mathfrak{H}$ mit $p(x) \leqq \mu \leqq p(y)$ existieren. Dann gilt für alle $z \in \mathfrak{H}$, $z \neq 0$, die Ungleichung*

$$f_\mu(z) > 0.$$

Beweis. Gilt $(Az, z) = 0$, so folgt aus (D^+) $(Bz, z) > 0$ und somit aus (2. 6) die Behauptung.

Ist $(Az, z) \neq 0$, so ergibt sich aus (3. 3) und (3. 4) $(\mu - s(z))(Az, z) > 0$, also nach (2. 6) $f_\mu(z) > 0$.

Folgerung 2. *Ist* μ *eine reelle Zahl mit* $\inf_{x\in\mathfrak{H}\setminus\{0\}} p(x) \leqq \mu \lneqq \sup_{x\in\mathfrak{H}/\{0\}} p(x)$, *so gilt für alle* $z\in\mathfrak{H}$, $z\neq 0$, *die Ungleichung*

$$f_\mu(z)\geqq 0.$$

Der Beweis ist dem vorstehenden Beweis der Folgerung 1 analog.

Aus dem für das Folgende grundlegenden Lemma 3. 4 ergibt sich

Lemma 3. 5. *Es sei* μ *eine reelle Zahl mit* $f_\mu(z)>0$ *für alle* $z\in\mathfrak{H}$, $z\neq 0$, *und seien* x, y *Elemente aus* $\mathfrak{H}$ *mit* $p(x)\leqq p(y)$ *und* $\big(L(\mu)x, y\big)=0$. *Dann gilt*

(1) *Aus* $p(y)>p(x)\geqq\mu$ *folgt* $p(x+y)>\mu$.

(2) *Aus* $p(y)=p(x)=\mu$ *und* $x\neq -y$ *folgt* $p(x+y)=\mu$.

(3) *Aus* $p(x)<p(y)\leqq\mu$ *folgt* $p(x+y)<\mu$.

Beweis. (0) Wegen $f_\mu(z)>0$ folgt aus (2. 8)

(3. 10) $$\operatorname{sgn}\big[\big(L(\mu)z, z\big)\big]=\operatorname{sgn}\,[\mu-p(z)]\,^{6)} \qquad (z\in\mathfrak{H},\ z\neq 0).$$

Weiter benutzen wir die nach Voraussetzung gültige Gleichung

(3. 11) $$\big(L(\mu)(x+y),\, x+y\big)=\big(L(\mu)x, x\big)+\big(L(\mu)y, y\big).$$

(1) Aus $p(y)>p(x)\geqq\mu$ erhält man infolge (3. 10) $\big(L(\mu)x, x\big)\leqq 0$ und $\big(L(\mu)y, y\big)<0$, daher wegen (3. 11) $\big(L(\mu)(x+y), x+y\big)<0$, also auf Grund von (3. 10) $p(x+y)>\mu$.

Analog ergeben sich die Beweise von (2) und (3).

Folgerung (s. [1]). *Es seien* x, y *von* 0 *verschiedene Elemente aus* $\mathfrak{H}$, *wobei zu* x *eine reelle Zahl* μ *mit* $L(\mu)x=0$ *und* $p(x)=\mu$ *existiere. Dann gilt:*

(1) *Aus* $p(y)>p(x)$ *folgt* $p(y+x)>p(x)$.

(2) *Aus* $p(y)=p(x)$ *und* $y\neq -x$ *folgt* $p(y+x)=p(x)$.

(3) *Aus* $p(y)<p(x)$ *folgt* $p(y+x)<p(x)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\big(L(\mu)x, y\big)=0$. Außerdem ist wegen der Folgerung 1 zu Lemma 3. 4 $f_\mu(z)>0$ $(z\in\mathfrak{H}, z\neq 0)$. Also läßt sich das Lemma 3. 5 anwenden.

Wir geben nun noch einen Zusammenhang zwischen Funktionalen erster und zweiter Art an, mit deren Hilfe die bisher bewiesenen Aussagen über p auf s übertragen werden können.

---

6) sgn a = 1, 0, oder —1 je nachdem $a>0$, $a=0$, oder $a<0$.

Lemma 3. 6. (1) *Es sei* $x_0 \in \mathfrak{H}$, $x_0 \neq 0$, *beliebig. Mit Hilfe von* $\alpha = p(x_0)$ *ordnen wir der Schar* L *eine Schar* $\tilde{L}_\alpha$ *durch*

$$\tilde{L}_\alpha(\lambda) = \lambda^2 \tilde{A}_\alpha + \lambda \tilde{B}_\alpha + \tilde{C}_\alpha$$

mit $\tilde{A}_\alpha = L(\alpha)$, $\tilde{B}_\alpha = 2\alpha A + B$, $\tilde{C}_\alpha = A$ *zu. Dann erfüllt* $\tilde{L}_\alpha$ *die Bedingung* (D^+) *und für die zugehörigen Funktionale* $\tilde{p}_\alpha$, $\tilde{s}_\alpha$ *gilt*

$$\tilde{p}_\alpha(x) = \frac{1}{s(x)-\alpha} \qquad (x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0)\ ^{7)}, \tag{3. 12}$$

$$\tilde{s}_\alpha(x) = \frac{1}{p(x)-\alpha} \qquad (x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0). \tag{3. 13}$$

(2) *Es sei* $B \geqq 0$. *Dann gelten die in* (1) *formulierten Aussagen mit* $\alpha = 0$.

Beweis. (1) Die Definitionen ergeben unmittelbar die Beziehung

$$(\tilde{B}_\alpha x, x)^2 - 4(\tilde{A}_\alpha x, x)(\tilde{C}_\alpha x, x) = (Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(Cx, x) \qquad (x \in \mathfrak{H}). \tag{3. 14}$$

Da außerdem aus Lemma 2. 3

$$(\tilde{A}_\alpha x_0, x_0) = \big(L(p(x_0))x_0, x_0\big) = 0$$

und

$$(\tilde{B}_\alpha x_0, x_0) = 2p(x_0)(Ax_0, x_0) + (Bx_0, x_0) > 0$$

folgt, ergibt sich auf Grund von (3. 14) und Lemma 2. 1 aus der Bedingung (D^+) für L sofort die Gültigkeit von (D^+) auch für $\tilde{L}_\alpha$.|

Wir betrachten nun die Schar $L_\alpha(\lambda) = \lambda^2 A_\alpha + \lambda B_\alpha + C_\alpha$ mit $A_\alpha = \tilde{C}_\alpha$, $B_\alpha = \tilde{B}_\alpha$, $C_\alpha = \tilde{A}_\alpha$. Wieder folgt die Gültigkeit von (D^+) für L_α unmittelbar aus der Bedingung (D^+) für L.

Für L_α und die zugehörigen Funktionale d_α, p_α, s_α ergibt sich

$$L_\alpha(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda(2\alpha A + B) + \alpha^2 A + \alpha B + C = L(\lambda + \alpha),$$

aus (3. 14)

$$d_\alpha(x) = d(x) \qquad (x \in \mathfrak{H})$$

und daher aus (2. 2) und (2. 3)

$$p_\alpha(x) = p(x) - \alpha,\ s_\alpha(x) = s(x) - \alpha \qquad (x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0).$$

(a) Nach Lemma 3. 4 ist $s(x) \neq p(x_0) = \alpha$ $(x \in \mathfrak{H},\ x \neq 0)$ und somit $s_\alpha(x) \neq 0$. Daher gilt nach Definition von L_α und auf Grund von Lemma 2. 3 für alle $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$, mit $s_\alpha(x) \neq \infty$

$$\big(\tilde{L}_\alpha(s_\alpha^{-1}(x))x,\ x\big) = s_\alpha^{-2}(x)\big(L_\alpha(s_\alpha(x))x,\ x\big) = 0 \tag{3. 15}$$

---

7) Hierbei setzen wir wie üblich $\infty - \alpha = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$.

und nach (2. 10)

$$\left.\frac{d(\tilde{L}_\alpha(\lambda)x,x)}{d\lambda}\right|_{\lambda=s_\alpha^{-1}(x)} = 2s_\alpha^{-1}(x)(\tilde{A}_\alpha x,x)+(\tilde{B}_\alpha x,x) = 2s_\alpha(x)(\tilde{L}_\alpha(s_\alpha^{-1}(x))x,x)-$$

$$(3.16)\qquad -2s_\alpha(x)(\tilde{C}_\alpha x,x)-(\tilde{B}_\alpha x,x) = -[2s_\alpha(x)(A_\alpha x,x)+(B_\alpha x,x)] > 0.$$

Entsprechendes gilt mutatis mutandis für $s_\alpha(x)=\infty$. (3. 15) und (3. 16) ergeben so wegen Lemma 2. 3 die Beziehung (3. 12).

(b) Für $x\in\mathfrak{H}$ gelte $p_\alpha(x)\neq 0$. Analog zu Teil (a) erhält man dann

$$(\tilde{L}_\alpha(p_\alpha^{-1}(x))x,x) = 0$$

und

$$\left.\frac{d(\tilde{L}_\alpha(\lambda)x,x)}{d\lambda}\right|_{\lambda=p_\alpha^{-1}(x)} < 0,$$

also nach Lemma 2. 3 die Gleichung (2. 13).

Ist $p_\alpha(x)=0$, so folgt aus $(L_\alpha(p_\alpha(x))x,x)=0$ die Beziehung $(\tilde{A}_\alpha x,x)=(C_\alpha x,x)=0$ und somit $\tilde{s}_\alpha(x)=\infty$. Daher gilt auch dann (3. 13).

(2) Ist $B\geqq 0$, so folgt aus (3. 14) für $\tilde{L}_0$ unmittelbar die Gültigkeit von (D^+). Alles Weitere liefert der Beweis zu (1) mit $\alpha=0$ (vgl. [1]).

4. Das Spektrum von L

Wegen der Einheitlichkeit der Darstellung setzen wir für alles Folgende $L(\infty)=A$[8]) und haben damit die Schar L auf allen Punkten der erweiterten komplexen Zahlenebene, die mit $\overline{\mathfrak{C}}$ bezeichnet werden soll, definiert.

Seien nun für einen beliebigen festen Wert $\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}$ das Spektrum $\sigma(L(\lambda))$, dessen Teile $\sigma_p(L(\lambda))$, $\sigma_r(L(\lambda))$, $\sigma_c(L(\lambda))$ und die Resolventenmenge $\varrho(L(\lambda))$ des Operators $L(\lambda)$ wie üblich (s. z.B. [10], S. 292) erklärt.

Wir definieren $\varrho(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\,|\,0\in\varrho(L(\lambda))\}$, $\sigma(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\,|\,0\in\sigma(L(\lambda))\}$, $\sigma_p(L)=$ $=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\,|\,0\in\sigma_p(L(\lambda))\}$, $\sigma_c(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\,|\,0\in\sigma_c(L(\lambda))\}$, $\sigma_r(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\,|\,0\in\sigma_r(L(\lambda))\}$.

$\varrho(L)$ heiße *Resolventenmenge*, $\sigma(L)$ *Spektrum* und $\sigma_p(L)$ (bzw. $\sigma_r(L)$ und σ (L)) *Punkt-* (bzw. *Residual- und kontinuierliches*) *Spektrum* der Schar L.

Eine Folge (x_n) von Elementen aus $\mathfrak{H}$ nennen wir eine zu $\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}$ gehörige *Folge erster* (bzw. *zweiter*) *Art*, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

$$(4.1)\qquad \|x_n\|=1 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

$$(4.2)\qquad \lim_{n\to\infty} p(x_n)=\lambda \qquad \left(\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} s(x_n)=\lambda\right),$$

$$(4.3)\qquad L(\lambda)x_n\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

[8]) Vgl. Fußnote [4]).

Damit lassen sich weitere Teilmengen des Spektrums folgendermaßen definieren:

$\sigma^{(1)}(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\mid$ zu λ existiert eine Folge erster Art$\}$,

$\sigma_p^{(1)}(L)=\{\lambda\in\overline{\mathfrak{C}}\mid$ es existiert ein $x\in\mathfrak{H}$, $x\neq 0$, mit $p(x)=\lambda$ und $L(\lambda)x=0\}$,

$\sigma_i^{(1)}(L)=\{\lambda\in\sigma^{(1)}(L)\mid$ für jede zu λ gehörige Folge (x_n) erster Art mit $x_n\rightharpoonup x_0$ $(n\to\infty)$ [9]) gilt $x_0\neq 0$ und $p(x_0)=\lambda\}$ [10])

und in Analogie hierzu (mit $s(x)$ anstelle $p(x)$ und „Folge zweiter Art" anstelle „Folge erster Art") die Teilmengen $\sigma^{(2)}(L)$, $\sigma_p^{(2)}(L)$ und $\sigma_i^{(2)}(L)$.

Zum besseren Verständnis der Definitionen von $\sigma_i^{(1)}(L)$ und $\sigma_i^{(2)}(L)$ soll an ein Kriterium von H. Weyl erinnert werden, das folgendermaßen lautet (s. [9], S. 348):

Eine reelle Zahl ν ist genau dann ein isolierter Punkt endlicher Vielfachheit des Spektrums eines selbstadjungierten Operators T, wenn für jede Folge (x_n), $x_n\in\mathfrak{H}$ $(n=1,2,\cdots)$ mit $(T-\nu I)x_n\to 0$, $x_n\rightharpoonup x_0$ $(n\to\infty)$ und $\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$ gilt $x_0\neq 0$.

Wir nennen nun $\sigma^{(1)}(L)$ bzw. $\sigma^{(2)}(L)$ *Spektrum erster* bzw. *zweiter Art*, auf entsprechende Benennungen der übrigen Mengen soll der Einfachheit halber verzichtet werden.

Gilt $\lambda\in\sigma_p(L)$ (bzw. $\lambda\in\sigma_p^{(1)}(L)$ oder $\lambda\in\sigma_p^{(2)}(L)$), so heißt λ ein *Eigenwert* (bzw. ein *Eigenwert erster* oder *zweiter Art*) und entsprechend jedes $x\in\mathfrak{H}$, $x\neq 0$, mit $L(\lambda)x=0$ ein zu λ gehöriges *Eigenelement* (bzw. ein *Eigenelement erster* oder *zweiter Art*), Schließlich sagt man, der Eigenwert λ habe die endliche *Vielfachheit n*, wenn es zu λ genau n linear unabhängige Eigenelemente gibt.

Die folgenden Lemmata beinhalten einige einfache Eigenschaften der oben eingeführten Mengen.

Lemma 4. 1. *Es gilt*

(1) $\sigma_p^{(1)}(L)\subset\sigma^{(1)}(L)$, $\sigma_p^{(2)}(L)\subset\sigma^{(2)}(L)$. (2) $\sigma^{(1)}(L)\cup\sigma^{(2)}(L)$ *ist reell.*

(3) $\sigma^{(1)}(L)\cup\sigma^{(2)}(L)\subset\sigma(L)$. [11]) (4) $\sigma^{(1)}(L)\cap\sigma^{(2)}(L)\subset\{\inf_{x\neq 0}p(x),\sup_{x\neq 0}p(x)\}$.

(5) $\sigma_p^{(1)}(L)\cap\sigma_p^{(2)}(L)=\emptyset$. (6) $\sigma_p^{(1)}(L)\cup\sigma_p^{(2)}(L)=\sigma_p(L)$.

(7) $\sigma_p(L)$ *ist reell.* (8) $\sigma_r(L)=\emptyset$.

---

[9]) Das Symbol $\rightharpoonup$ soll im folgenden stets die schwache Konvergenz in $\mathfrak{H}$, das Symbol $\to$ ausschließlich die starke Konvergenz in $\mathfrak{H}$ bezeichnen.

[10]) Die Forderung $p(x_0)=\lambda$ ist offenbar automatisch erfüllt, falls $\inf_{x\neq 0}p(x)<\lambda<\sup_{x\neq 0}p(x)$ gilt (s. Lemma 3. 4).

[11]) Es gilt i.a. $\sigma^{(1)}(L)\cup\sigma^{(2)}(L)\neq\sigma(L)$.

Beweis. Die Aussagen (1), (2) und (3) gelten per definitionem. (4) und (5) ergeben sich aus Lemma 3. 4. (6) folgt daraus, daß für jedes $\lambda \in \sigma_p(L)$ und ein beliebiges zugehöriges Eigenelement x die Gleichung $(L(\lambda)x, x)=0$, also wegen Lemma 2. 3, $\lambda = p(x)$ oder $\lambda = s(x)$ gilt. (7) ergibt sich aus (1), (2) und (6). (8) Angenommen, es sei $\lambda \in \sigma_r(L)$, d. h. $0 \in \sigma_r(L(\lambda))$. Dann gilt (s. [10], S. 304) $0 \in \sigma_p([L(\lambda)]^*) = \sigma_p(L(\bar{\lambda}))$, d.h. $\bar{\lambda} \in \sigma_p(L)$. Wegen (7) gilt aber $\lambda = \bar{\lambda}$ und deshalb $\lambda \in \sigma_p(L)$ im Widerspruch zu $\lambda \in \sigma_r(L)$.

Lemma 4. 2. *Der Schar L werde auf die in Lemma 3. 6, (1) oder (2), angegebene Weise die Schar $\tilde{L}_\alpha$ zugeordnet. Dann sind die Beziehungen*

$$\lambda \in \sigma^{(2)}(L) \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\lambda-\alpha} \in \sigma^{(1)}(\tilde{L}_\alpha),\ ^{12)} \qquad \lambda \in \sigma_p^{(2)}(L) \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\lambda-\alpha} \in \sigma_p^{(1)}(\tilde{L}_\alpha),$$

ebenso wie

$$\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\lambda-\alpha} \in \sigma^{(2)}(\tilde{L}_\alpha), \qquad \lambda \in \sigma_p^{(1)}(L) \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\lambda-\alpha} \in \sigma_p^{(2)}(\tilde{L}_\alpha),$$

zueinander äquivalent.

Der Beweis des Lemmas folgt unmittelbar aus den entsprechenden Definitionen und sei deshalb dem Leser überlassen.

Im folgenden werden wir nun alle Aussagen ausschließlich für das Spektrum erster Art formulieren. Die entsprechenden Aussagen für das Spektrum zweiter Art ergeben sich dann sofort mittels Lemma 4. 2.

Lemma 4. 3. *Jeder Wert $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$ ist ein Eigenwert endlicher Vielfachheit von L, und es gilt $\lambda \in \sigma_p^{(1)}(L)$.*

Beweis. (1) sei $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$. Nach Definition existiert eine zu λ gehörige Folge (x_n) erster Art. Wegen $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ besitzt diese Folge in $\mathfrak{H}$ eine schwach konvergente Teilfolge (x_{n_k}); es sei $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ $(k \to \infty)$. Auf Grund von $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$ gilt dann $x_0 \neq 0$ und $p(x_0) = \lambda$. Außerdem folgt aus $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ $(k \to \infty)$ die Beziehung $L(\lambda)x_{n_k} \rightharpoonup L(\lambda)x_0$ $(k \to \infty)$. Nach Voraussetzung gilt aber $L(\lambda)x_{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$, somit erhalten wir $L(\lambda)x_0 = 0$, also $\lambda \in \sigma_p^{(1)}(L)$.

(2) Angenommen, λ wäre ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit. Dann existierte ein unendliches Orthonormalsystem (e_n) von Eigenelementen der Schar L zum Eigenwert λ, das offenbar eine zu λ gehörige Folge erster Art ist. Bekanntlich gilt aber $e_n \rightharpoonup 0$ $(n \to \infty)$ im Widerspruch zu $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$.

Lemma 4. 4. *Ist λ ein Häufungspunkt der Menge $\sigma^{(1)}(L)$, so gilt*

$$\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \setminus \sigma_i^{(1)}(L).$$

---

[12]) Vgl. Fußnote [7]).

Beweis. (1) Sei $\lambda \neq \infty$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge (λ_n), $\lambda_n \in \sigma^{(1)}(L)$ $(n=1, 2, \cdots)$, mit $\lambda_n \neq \lambda$ und

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda. \tag{4. 4}$$

Dann gibt es wegen $\lambda_n \in \sigma^{(1)}(L)$ $(n=1, 2, \cdots)$ zu jeder natürlichen Zahl n eine Folge $(x_m^{(n)})$ aus $\mathfrak{H}$, so daß für die Beziehungen

$$\|L(\lambda_n) x_m^{(n)}\| < \frac{1}{m}|\lambda_m - \lambda|, \qquad |p(x_m^{(n)}) - \lambda_n| < \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \|x_m^{(n)}\| = 1 \tag{4. 5}$$

für alle $n, m = 1, 2, \cdots$ gelten.

Setzen wir $y_n = x_n^{(n)}$ $(n=1, 2, \cdots)$, so folgt

$$|p(y_n) - \lambda| \leqq |p(y_n) - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| < \frac{1}{n} + |\lambda_n - \lambda|,$$

also wegen (4. 4)

$$\lim_{n\to\infty} p(y_n) = \lambda$$

und unter Beachtung von $\|y_n\| = 1$ $(n=1, 2, \cdots)$

$$\|L(\lambda) y_n\| \leqq \|L(\lambda_n) y_n\| + \|(L(\lambda_n) - L(\lambda)) y_n\| < \frac{1}{n}|\lambda_n - \lambda| + |\lambda_n^2 - \lambda^2| \, \|A\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|B\|,$$

also wegen (4. 4)

$$L(\lambda) y_n \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4. 6}$$

Daher gilt $\lambda \in \sigma^{(1)}(L)$, wobei (y_n) eine zu λ gehörige Folge erster Art ist. Diese enthält eine schwach konvergente Teilfolge (y_{n_k}), $y_{n_k} \rightharpoonup y$ $(k \to \infty)$, die offenbar wieder eine zu λ gehörige Folge erster Art ist.

Angenommen, es wäre $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$. Dann gilt $y \neq 0$ und $p(y) = \lambda$. Aus $y_{n_k} \rightharpoonup y$ $(k \to \infty)$ ergibt sich $L(\lambda) y_{n_k} \rightharpoonup L(\lambda) y$ $(k \to \infty)$ und somit aus (4. 6)

$$L(\lambda) y = 0. \tag{4. 7}$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda}(L(\lambda_n) - L(\lambda)) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda}[(\lambda_n^2 - \lambda^2) A + (\lambda_n - \lambda) B] =$$
$$= (\lambda_n + \lambda) A + B \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Hieraus folgt

$$([(\lambda_n + \lambda) A + B] y_n, y) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda}[(L(\lambda_n) y_n, y) - (L(\lambda) y_n, y)] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Unter Beachtung der nach (4. 7) gültigen Beziehung $(L(\lambda) y_n, y) = (y_n, L(\lambda) y) = 0$ erhält man so auf Grund von (4. 5)

$$|([\lambda_{n_k} + \lambda) A + B] y_{n_k}, y)| \leqq \frac{1}{|\lambda_{n_k} - \lambda|} \|L(\lambda_{n_k}) y_{n_k}\| \, \|y\| < \frac{1}{n_k} \|y\|. \tag{4. 8}$$

Nun gilt aber wegen $y_{n_k} \rightharpoonup y$ $(k \to \infty)$ und $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = \lambda$

$$([(\lambda_{n_k}+\lambda)A+B]y_{n_k}, y) \to ([2\lambda A+B]y, y).$$

Zusammen mit (4. 8) ergibt sich dann

$$f_\lambda(y) = ([2\lambda A+B]y, y) = 0.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, daß für y als Eigenelement erster Art zu λ nach (2.9) $f_\lambda(y) > 0$ gilt.

(2) Sei $\lambda = \infty$. Wird $\tilde{L}_\alpha$ wie in Lemma 3. 6 definiert, so ist nach Voraussetzung wegen Lemma 4. 2 0 ein Häufungspunkt der Menge $\sigma^{(2)}(\tilde{L}_\alpha)$. Wie in (1) zeigt man dann $0 \in \sigma^{(2)}(\tilde{L}_\alpha)$. Aus Lemma 4. 2 ergibt sich so $\infty \in \sigma^{(1)}(L)$. Offenbar gilt aber $\infty \notin \sigma_i^{(1)}(L)$, da das Funktional $p(x)$ per definitionem auf $\mathfrak{H} \setminus \{0\}$ nur endliche Werte annimmt.

Folgerung. *Jedes* $\lambda \in \sigma_i^{(1)}(L)$ *ist ein isolierter Punkt von* $\sigma^{(1)}(L)$.

5. Minimaxprinzipe

Lemma 5. 1 (s. [1]). *Sind* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ *Eigenwerte erster Art von* L *und* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *zugehörige Eigenelemente* [13]), *so gilt*

$$\lambda_1 < p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) < \lambda_n.$$

Folgerung 1. *Es sei* $\mathfrak{S}_i = \{x \in \mathfrak{H} \mid L(\lambda_i)x = 0\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. *Dann gilt für jedes* $x \in \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{S}_n$, $x \neq 0$,

$$\lambda_1 \leqq p(x) \leqq \lambda_n.$$

Folgerung 2. *Die Elemente* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *sind linear unabhängig.*

Den Beweis des Lemmas und seiner Folgerungen erhält man wie in [1].

Für das Folgende werde mit $\mathfrak{L}_i$ $(i = 0, 1, \cdots)$ die Gesamtheit aller der Teilräume von $\mathfrak{H}$ bezeichnet, deren orthogonales Komplement in $\mathfrak{H}$ ein i-dimensionaler Teilraum ist. Wir nennen die reelle Zahl

$$k_i = \sup_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \inf_{x \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} p(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots)$$

den *i-ten Minimum-Maximum-Wert* (erster Art) von L.

Das wesentliche Ergebnis dieses Kapitels soll nun darin bestehen, unter geeigneten Voraussetzungen die Eigenwerte erster Art von L als Minimum-Maximum-Werte erster Art zu charakterisieren. Zuvor beweisen wir einige vorbereitende Lemmata.

[13]) Man beachte, daß nach Definition und wegen Lemma 4. 1, (5), für jedes Eigenelement x zu einem Eigenwert λ erster Art gilt $p(x) = \lambda$.

Lemma 5. 2. *Zu jedem $(i+1)$-dimensionalen Teilraum $\mathfrak{B}_{i+1} \subset \mathfrak{H}$ $(i=0, 1, \cdots)$ existiert ein Element $y_{i+1} \in \mathfrak{B}_{i+1}$ mit*

$$p(y_{i+1}) \geqq k_i.$$

Beweis. Angenommen, für alle $y \in \mathfrak{B}_{i+1}$, $y \neq 0$, gelte

$$p(y) < k_i. \tag{5. 1}$$

Wir betrachten das Supremum $s_{i+1} = \sup\limits_{x \in \mathfrak{B}_{i+1} \setminus \{0\}} p(x)$. Da $p(x)$ nach Lemma 3. 1 auf der Einheitskugel $\mathfrak{K}_{i+1}$ von $\mathfrak{B}_{i+1}$ stetig ist, existiert ein Element $x_{i+1} \in \mathfrak{K}_{i+1}$ mit $p(x_{i+1}) = \sup\limits_{x \in \mathfrak{K}_{i+1}} p(x) = s_{i+1}$. Auf Grund von (5. 1) folgt so

$$s_{i+1} = p(x_{i+1}) < k_i. \tag{5. 2}$$

Bekanntlich gibt es aber zu jedem $\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i$ ein $y_{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{B}_{i+1}$ mit $y_{\mathfrak{L}} \neq 0$ (s. z.B. [9], S. 223). Also gilt für jedes $\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i$ $\inf\limits_{x \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} p(x) \leqq s_{i+1}$ und daher

$$k_i = \sup_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_i} \inf_{x \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} p(x) \leqq s_{i+1},$$

im Widerspruch zu (5. 2).

Lemma 5. 3. *Es seien $x_0, x_1, \cdots, x_n$ linear unabhängige Eigenelemente erster Art von L und $\lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \cdots \leqq \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Ferner sei μ eine reelle Zahl mit den Eigenschaften $\lambda_n \leqq \mu$ und $f_\mu(x) > 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, $x \neq 0$. Dann gilt für*

$$\mathfrak{H}_{n+1} = \{x \in \mathfrak{H} \mid ([(\mu+\lambda_i)A + B]x_i, x) = 0 \quad (i=0, 1, \cdots, n)\}.$$

(1) *die Elemente $y_i = [(\mu+\lambda_i)A + B]x_i$ $(i=0, 1, \cdots, n)$ sind linear unabhängig, d.h., es ist $\mathfrak{H}_{n+1} \in \mathfrak{L}_{n+1}$;*

(2) *für jedes $z \in \mathfrak{H}_{n+1}$, $z \neq 0$, sind $x_0, x_1, \cdots, x_n, z$ linear unabhängig;*

(3) *es ist*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{X}_{n+1} \dotplus \mathfrak{H}_{n+1} \text{ [14]}, \tag{5. 3}$$

wobei $\mathfrak{X}_{n+1}$ die lineare Hülle der Elemente $x_0, x_1, \cdots, x_n$ bezeichnet.

Beweis. Wir vermerken für das Folgende die Beziehung

$$L(\mu)x_i = [L(\mu) - L(\lambda_i)]x_i = (\mu - \lambda_i)[(\mu+\lambda_i)A + B]x_i \tag{5. 4}$$

und definieren $J_n' = \{i \mid i=0, 1, \cdots, n \text{ und } \lambda_i \neq \mu\}$ bzw. $J_n = \{i \mid i=0, 1, \cdots, n \text{ und } \lambda_i = \mu\}$.

(1) Für die komplexen Zahlen α_i $(i=0, 1, \cdots, n)$ gelte

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i = 0. \tag{5. 5}$$

[14]) Durch das Symbol $\dotplus$ seien im folgenden direkte Summen gekennzeichnet.

Wir setzen $z_1 = \sum_{i \in J'_n} \frac{\alpha_i}{\mu - \lambda_i} x_i$ und $z_2 = \sum_{i \in J_n} \alpha_i x_i$. Offenbar gilt nach (5. 4) $L(\mu) z_1 = \sum_{i \in J'_n} \alpha_i y_i$ und per definitionem $(2\mu A + B) z_2 = \sum_{i \in J_n} \alpha_i y_i$. (5. 5) erhält so die Gestalt

(5. 6) $$L(\mu) z_1 = -(2\mu A + B) z_2 .$$

Angenommen, es sei $z_2 \neq 0$. Dann ergäbe sich aus Punkt (2) der Folgerung von Lemma 3. 5 $p(z_2) = \mu$. Da weiter nach Definition $L(\mu) z_2 = 0$ gilt, folgte somit aus (5. 6)

$$f_\mu(z_2) = ([(\mu + p(z_2))A + B] z_2, z_2) = ([2\mu A + B] z_2, z_2) =$$
$$= -(L(\mu) z_1, z_2) = -(z_1, L(\mu) z_2) = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $\sum_{i \in J_n} \alpha_i x_i = z_2 = 0$ und daher wegen der linearen Unabhängigkeit der x_i

(5. 7) $$\alpha_i = 0 \quad \text{für alle} \quad i \in J_n .$$

Außerdem erhält man aus 5. 6 $L(\mu) z_1 = 0$.

Wäre nun $z_1 \neq 0$, so ergäbe sich nach Voraussetzung $f_\mu(z_1) > 0$ und daher aus (2. 8) $p(z_1) = \mu$; z_1 wäre also ein Eigenelement erster Art zu μ. Dann sind aber auf Grund der Folgerung 2 zu Lemma 5. 1 die Elemente z_1 und x_i $(i \in J'_n)$ linear unabhängig im Widerspruch zur Definition von z_1.

Es gilt also $z_1 = 0$. Dies ergibt wegen der linearen Unabhängigkeit der x_i $\alpha_i = 0$ für alle $i \in J'_n$ und zusammen mit (5. 7) schließlich $\alpha_i = 0$ für alle $i = 0, 1, \cdots, n$, w. z. z. w.

(2) Angenommen, es sei $z = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i$. Dann folgt aus (5. 4)

$$(L(\mu) z, z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\mu - \lambda_i)([(\mu + \lambda_i) A + B] x_i, z) = 0.$$

(2. 8) liefert so zusammen mit $f_\mu(z) > 0$ die Beziehung $p(z) = \mu$. Hieraus ergibt sich $\alpha_i = 0$ für alle $i \in J'_n$; andernfalls wäre nämlich nach Lemma 5. 1 $\mu = p(z) = p\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i\right) < \lambda_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda_n \leqq \mu$.

Daher gilt $z = \sum_{i \in J_n} \alpha_i x_i$. Aus $z \in \mathfrak{H}_{n+1}$ erhält man aber wegen $p(z) = \mu$

$$f_\mu(z) = ([2\mu A + B] z, z) = \left(\sum_{i \in J_n} \alpha_i ([(\mu + \lambda_i) A + B] x_i, z)\right) = 0$$

im Widerspruch zu $f_\mu(z) > 0$.

(3) Wir betrachten die — nach (2) direkte — Summe $\mathfrak{H}' = \mathfrak{X}_{n+1} \dot{+} \mathfrak{H}_{n+1}$. $\mathfrak{H}'$ ist dann infolge der endlichen Dimension von $\mathfrak{X}_{n+1}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{H}$ (s. [10]).

Für jedes $i=0, 1, \cdots, n$ bezeichne $[x_i]$ die lineare Hülle des Elementes x_i. Wegen (2) existiert ein $z_0 \in [x_0] + \mathfrak{H}_{n+1}$, $\|z_0\| = 1$, mit $(z_0, \mathfrak{H}_{n+1}) = \{0\}$. Entsprechend findet man ein

$$z_1 \in [x_1] \dotplus [x_0] \dotplus \mathfrak{H}_{n+1}, \ \|z_1\| = 1, \quad \text{mit} \quad (z_1, [x_0] \dotplus \mathfrak{H}_{n+1}) = \{0\}.$$

$(n+1)$-malige Anwendung dieses Verfahrens liefert ein in $\mathfrak{H}'$ zu $\mathfrak{H}_{n+1}$ orthogonales Orthonormalsystem $z_0, z_1, \cdots, z_n$; $\mathfrak{H}_{n+1}$ besitzt also in $\mathfrak{H}'$ einen Defekt $\geqq n+1$. Da aber $\mathfrak{H}_{n+1}$ in $\mathfrak{H}$ den Defekt $n+1$ hat, folgt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' = \mathfrak{X}_{n+1} \dotplus \mathfrak{H}_{n+1}, \qquad \text{w.z.z.w.}$$

Wir kommen nun zur Formulierung eines Minimaxprinzips.

Satz 5. 1. (Minimum-Maximum-Prinzip.) *Es sei* $\alpha = \inf\limits_{x \in \mathfrak{H}\setminus\{0\}} p(x) \neq \infty$, *und es existiere eine reelle Konstante* $\beta > \alpha$ *mit der Eigenschaft* $\sigma^{(1)}(L) \cap [\alpha, \beta) \subset \sigma_i^{(1)}(L)$. *Dann gilt*

(1) *Jeder Minimum-Maximum-Wert* $k_n \in [\alpha, \beta)$ *ist ein Eigenwert erster Art und endlicher Vielfachheit von L.*

(2) *Jeder Punkt* $\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \cap [\alpha, \beta)$ *ist ein Eigenwert erster Art von endlicher Vielfachheit und tritt in der Menge der* k_n $(n=0, 1, \cdots)$ *seiner Vielfachheit entsprechend oft auf.*

(3) *Es sei* $k_n \in [\alpha, \beta)$. *Dann existiert ein System von* $n+1$ *linear unabhängigen Eigenelementen* $x_0, x_1, \cdots, x_n$ *mit den zugehörigen Eigenwerten* $\lambda_0 = k_0, \lambda_1 = k_1, \cdots, \cdots, \lambda_n = k_n$.[15]) *Definieren wir* $\mathfrak{H}_n = \{x \in \mathfrak{H} \mid ([k_n + \lambda_j)A + B]x_j, x) = 0 \ (j=0, \cdots, n-1)\}$, *so gilt überdies*

(3₁) $k_n = \min\limits_{x \in \mathfrak{H}_n\setminus\{0\}} p(x)$.

(3₂) *Jedes Element* $y \in \mathfrak{H}_n$, $y \neq 0$, *mit* $p(y) = k_n$ *ist ein zu* k_n *gehöriges Eigenelement und ist außerdem linear unabhängig von den Elementen* $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$.

Beweis. Zu (3) (vollständige Induktion). Es sei $k_l \in [\alpha, \beta)$. Ferner sei die Aussage (3) des Satzes für $n = l-1$ richtig. Dann können wir uns beim Beweis von (3) auf den Beweis von (3₁) und (3₂) beschränken, da aus diesen Beziehungen unmittelbar die Existenz eines zu k_l gehörigen Eigenelementes x_l folgt, das von den nach Induktionsvoraussetzung existierenden Eigenelementen $x_0, x_1, \cdots, x_{l-1}$ linear unabhängig ist.

(a) Wir zeigen als erstes

$$k_l = \inf_{x \in \mathfrak{H}\setminus\{0\}} p(x). \tag{5.8}$$

(a₁) Es sei zunächst $k_{l-1} < k_l$. Offenbar existiert dann ein $y_0 \in \mathfrak{H}$ mit $p(y_0) \leqq k_l$ und außerdem nach Lemma 5. 2 ein $y_1 \in \mathfrak{H}$ mit $k_l \leqq p(y_1)$. Daher sind wegen der

[15]) Es sei daran erinnert, daß nach Definition $\alpha = k_0 \leqq k_1 \leqq \ldots$ gilt.

Folgerung 1 aus Lemma 3. 4 für $\mu=k_l$ die Voraussetzungen zu Lemma 3. 5 und mit $x_0, x_1, \cdots, x_{l-1}$ und $\mu=k_l$ zu Lemma 5. 3 erfüllt. Diese beiden Lemmata sollen im folgenden angewendet werden.

Wir nehmen an, es gäbe ein $z_l \in \mathfrak{H}_l$, $z_l \neq 0$, mit $p(z_l) < k_l$. Ist dann x ein (beliebiges) Element aus $\mathfrak{H}$ der Gestalt $x = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j x_j$, so gilt wegen $z_l \in \mathfrak{H}_l$ unter Benutzung der auch hier gültigen Beziehung (5. 4)

$$(L(k_l)x, z_l) = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j (k_l - \lambda_j)([(k_l + \lambda_j)A + B]x_j, z_l) = 0.$$

Weiter ist wegen der Folgerung 1 aus Lemma 5. 1

$$p(x) = p\left(\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j x_j\right) \leqq \lambda_{l-1} = k_{l-1} < k_l$$

und nach Annahme $p(z_l) < k_l$. Somit liefert Lemma 3. 5, (3),

$$p(x+z_l) < k_l.$$

Bezeichnet $\mathfrak{Z}_l$ die lineare Hülle der Elemente $x_0, x_1, \cdots, x_{l-1}, z_l$, so gilt also

(5. 9) $$p(y) < k_l \quad \text{für alle} \quad y \in \mathfrak{Z}_l, \ y \neq 0.$$

Auf Grund von Lemma 5. 3, (2), ist aber $\dim \mathfrak{Z}_l = l+1$, daher ergibt sich aus Lemma 5. 2 die Existenz eines Elementes $y_{l+1} \in \mathfrak{Z}_l$ mit $p(y_{l+1}) \geqq k_l$. Widerspruch zu (5. 9).

Damit ist die Ungleichung

(5. 10) $$k_l \leqq \inf_{n \in \mathfrak{H}_l \setminus \{0\}} p(x)$$

bewiesen.

Andererseits ist infolge Lemma 5. 3, (1), $\mathfrak{H}_1 \in \mathfrak{L}_1$. Daher gilt

(5. 11) $$\inf_{x \in \mathfrak{H}_l \setminus \{0\}} p(x) \leqq \sup_{\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}_l} \inf_{x \in \mathfrak{L} \setminus \{0\}} p(x) = k_l.$$

(5. 10) und (5. 11) ergeben (5. 8).

(a$_2$) Es sei $k_{l-1} = k_l$. Auch dann gilt offenbar die Ungleichung (5. 11). Außerdem ist nach Definition $\mathfrak{H}_l \subset \mathfrak{H}_{l-1}$, somit erhält man

(5. 12) $$\inf_{x \in \mathfrak{H}_l \setminus \{0\}} p(x) \geqq \inf_{x \in \mathfrak{H}_{l-1} \setminus \{0\}} p(x) = k_{l-1} = k_l.$$

Wieder liefern (5. 11) und (5. 12) die Gleichung (5. 8).

(b) Wir beweisen nun die Existenz eines Elementes $x_l \in \mathfrak{H}_l$, $x_l \neq 0$, mit $p(x_l) = k_l$ und $L(x_l) = 0$.

Da nach (5. 8) für alle $x \in \mathfrak{H}_l$, $x \neq 0$, die Ungleichung $k_l - p(x) \leqq 0$ gilt, ergibt sich aus (2. 8) zusammen mit Folgerung 2 von Lemma 3. 4

(5. 13) $$(L(k_l)x, x) \leqq 0 \qquad (x \in \mathfrak{H}_l).$$

Wegen (5. 8) existiert eine Folge (x_n^l), $x_n^l \in \mathfrak{H}_l$ $(n=1, 2, \cdots)$, mit $\|x_n^l\| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n^l) = k_l$. Da dann unter Beachtung von $(L(p(x_n^l))x_n^l, x_n^l) = 0$

$$(L(k_l)x_n^l, x_n^l) = ([L(k_l) - L(p(x_n^l))]x_n^l, x_n^l) \leqq$$
$$\leqq |k_l^2 - p^2(x_n^l)| \, \|A\| + |k_l - p(x_n^l)| \, \|B\| \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

gilt, folgt

(5. 14) $$\lim_{n\to\infty} (L(k_l)x_n^l, x_n^l) = 0.$$

Wir definieren mit P_l die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}_l$. Die infolge (5. 13) für die Bilinearform $(P_l L(k_l)x, y)$ $(x, y \in \mathfrak{H}_l)$ gültige Schwarzsche Ungleichung liefert

(5. 15) $$\begin{aligned} \|P_l L(k_l)x\|^4 &= (P_l L(k_l)x, P_l L(k\ )x)^2 \leqq |(P_l L(k_l)x, x)| \, |([P_l L(k_l)]^2 x, P_l L(k_l)x)| \leqq \\ &\leqq |(L(k_l)x, x)| \, \|P_l L(k_l)\|^3 \|x\|^2 \qquad (x \in \mathfrak{H}_1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt für (x_n^l) nach (5. 14)

(5. 16) $$P_l L(k_l)x_n^l \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Per definitionem ist nun $(I - P_l)(\mathfrak{H})$ der von den Elementen $y_j = [(k_l + \lambda_j)A + B]x_j$ $(j = 0, \cdots, l-1)$ aufgespannte Teilraum; es gilt also $\dim (I - P_l)(\mathfrak{H}) = l < \infty$. Somit existiert wegen der Kompaktheit beschränkter Mengen in $(I - P_l)\mathfrak{H}$ eine Teilfolge $(x_{n_k}^l)$, so daß die Folge $(L(k_l)x_{n_k}^l)$ auf Grund von

$$L(k_l)x_{n_k}^l = P_l L(k_l)x_{n_k}^l + (I - P_l)L(k_l)x_{n_k}^l$$

und nach (5. 16) konvergiert.

Wir zeigen jetzt $L(k_l)x_{n_k}^l \to 0$ $(k \to \infty)$. Für $P_l = I$ folgt dies sofort aus (5. 16). Im Falle $P_l \neq I$ gilt $\lambda_0 = p(x_0) \leqq k_l$, außerdem existiert nach (5. 8) ein $z_0 \in \mathfrak{H}_l$ mit $k_l \leqq p(z_0)$. Auf Grund der Folgerung 1 aus Lemma 3. 4 ist also Lemma 5. 3 mit $\mu = k_l$ anwendbar und liefert entsprechend (3) eine Zerlegung jedes Elementes $y \in \mathfrak{H}$ in die Summe

$$y = y' + y''$$

mit $y' = \sum\limits_{i=0}^{l-1} \alpha_i x_i$ und $y'' \in \mathfrak{H}_l$.

Da wegen (5. 4) und $x_{n_k}^l \in \mathfrak{H}_l$ $(k = 1, 2, \cdots)$

$$(L(k_l)x_{n_k}^l, y') = \left(x_{n_k}^l, L(k_l)\left(\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i x_i\right)\right) =$$

$$= \left(x_{n_k}^l, \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i (k_l - \lambda_i)[(k_l + \lambda_i)A + B]x_i\right) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

gilt, ergibt sich so für jedes $y \in \mathfrak{H}$ die Beziehung

(5.17) $\quad \big(L(k_l)x^l_{n_k}, y\big) = \big(L(k_l)x^l_{n_k}, y''\big) = \big(P_l L(k_l)x^l_{n_k}, y''\big) \qquad (k = 1, 2, \cdots).$

Also folgt aus (5. 16) und (5. 17) $L(k_l)x^l_{n_k} \rightharpoonup 0$ $(k \to \infty)$ und deshalb

$$L(k_l)x^l_{n_k} \to 0 \qquad (k \to \infty),$$

da die Folge $\big(L(k_l)x^l_{n_k}\big)$ nach Konstruktion stark konvergiert. Somit ist $(x^l_{n_k})$ eine zu k_l gehörige Folge erster Art; demnach gilt $k_l \in \sigma^{(1)}(L)$ und wegen $k_l \in [\alpha, \beta)$ auf Grund der Voraussetzungen des Satzes schließlich

(5. 18) $$k_l \in \sigma_i^{(1)}(L).$$

Wie in Teil (1) des Beweises zu Lemma 4. 3 erhalten wir nun durch Übergang zu einer Teilfolge (y_j), $y_j = x^l_{n_{k_j}}$ $(j = 1, 2, \cdots)$, eine zu k_l gehörige Folge erster Art mit $y_j \rightharpoonup x_l \neq 0$ $(j \to \infty)$. Dann gilt

$$L(k_l)x_l = 0 \quad \text{und} \quad p(x_l) = k_l,$$

und wegen $y_j \in \mathfrak{H}_l$, $j = 1, 2, \cdots$, ist $x_l \in \mathfrak{H}_l$.

(c) Die Beziehung (3_1) folgt nun unmittelbar aus den in (a) und (b) bewiesenen Aussagen. Ferner folgt für jedes $y \in \mathfrak{H}_l$ mit $p(y) = k_l$ aus (5. 15) $P_l L(k_l)y = 0$ und entsprechend aus (5. 17) $L(k_l)y = 0$. Die lineare Unabhängigkeit der Elemente $x_0, x_1, \cdots, x_{l-1}, y$ ergibt sich aus Lemma 5. 3, (2). Also gilt auch (3_2).

(d) Zur Vervollständigung unseres Induktionsbeweises bleibt noch die Richtigkeit von (3) für $n = 0$ zu zeigen. Wegen $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0$ gilt aber $k_0 = \inf\limits_{x = \mathfrak{H}_0 \setminus \{0\}} p(x)$. Wie in (b) läßt sich dann die Existenz eines $x_0 \in \mathfrak{H}_0$, $x_0 \neq 0$, mit $p(x_0) = k_0$ beweisen. Also gilt (3_1) für $n = 0$. Der Beweis für (3_2) im Falle $n = 0$ erfolgt wie in (c).

Zu (1). Nach (5. 18) und Lemma 4. 3 gilt (1).

Zu (2). (a) Es sei $\dim \mathfrak{H} = m < \infty$. Dann gilt $\sigma^{(1)}(L) = \sigma_i^{(1)}(L) = \sigma_p^{(1)}(L)$ und daher (3) mit $\beta = \infty$. Also existieren m linear unabhängige Eigenelemente erster Art zu den Eigenwerten $k_0, k_1, \cdots, k_{m-1}$; hieraus folgt (2).

(b) Es sei $\mathfrak{H}$ unendlichdimensional und sei $\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \cap [\alpha, \beta)$. Nach Voraussetzung und wegen Lemma 5. 3 ist dann λ ein Eigenwert erster Art und endlicher Vielfachheit von L.

Wir beweisen zunächst, daß es zwei benachbarte Minimum-Maximum-Werte k_n und k_{n+1} gibt, so daß $k_n \leqq \lambda < k_{n+1}$ gilt. Andernfalls wäre nämlich $k_l \in [\alpha, \lambda] \subset$ $\subset [\alpha, \beta)$ für alle $l = 0, 1, \cdots$; es gäbe also nach (1) und (3) in $[\alpha, \lambda)$ unendlich viele voneinander verschiedene Eigenwerte erster Art und somit einen Häufungspunkt $\mu \in [\alpha, \beta)$ der Menge $\sigma^{(1)}(L)$, für den wegen Lemma 4. 4 $\mu \in \sigma^{(1)}(L) \setminus \sigma_i^{(1)}(L)$ wäre. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Voraussetzung $\sigma^{(1)}(L) \cap [\alpha, \beta) \subset \sigma_i^{(1)}(L)$.

Also gibt es unter allen natürlichen Zahlen n mit $k_n > \lambda$ eine kleinste, die mit n_0 bezeichnet werden soll. Weiter sei $S = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n_0 - 1}\}$ ein nach (3) existierendes System linear unabhängiger Eigenelemente zu den Eigenwerten $k_0, k_1, \cdots, \cdots, k_{n_0-1}$. Gäbe es nun ein zu λ gehöriges Eigenelement y, das von dem System S linear unabhängig ist, so wäre die lineare Hülle $\mathfrak{L}$ von S und y ein (n_0+1)-dimensionaler Teilraum von $\mathfrak{H}$, für den einerseits nach Lemma 5. 2 $s=\sup_{x\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}} p(x)\geqq k_{n_0}$, also $s>\lambda$ und andererseits nach Folgerung 1 aus Lemma 5. 1 $s\leqq\lambda$ wäre. Widerspruch.

Folglich tritt λ unter der Menge der k_n $(n=0, 1, \cdots)$ seiner Vielfachheit entsprechend oft auf, w.z.z.w.

Das folgende Lemma gibt mit Hilfe von Satz 5. 1 eine andere Charakterisierung der Minimum-Maximum-Werte an. Hierbei bezeichne $\mathfrak{M}_n$ die Gesamtheit aller n-dimensionalen Teilräume von $\mathfrak{H}$.

Lemma 5. 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 5. 1 *gilt für jedes* $k_i\in[\alpha, \beta)$

$$k_i = \min_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{M}_{i+1}} \max_{x\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}} p(x). \tag{5.19}$$

Beweis. Nach Satz 5. 1 existieren $i+1$ linear unabhängige Eigenelemente $x_0, x_1, \cdots, x_i$ erster Art von L zu den Eigenverten $\lambda_0=k_0, \lambda_1=k_1, \cdots, \lambda_i=k_i$. Dann gehört die lineare Hülle $\mathfrak{X}_{i+1}$ der Elemente $x_0, x_1, \cdots, x_i$ zu $\mathfrak{M}_{i+1}$ und es gilt nach Folgerung 1 aus Lemma 5. 1

$$k_i = \lambda_i = \max_{x\in\mathfrak{X}_{i+1}\setminus\{0\}} p(x). \tag{5.20}$$

Aus Lemma 5. 2 folgt aber $\max_{x\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}} p(x)\geqq k_i$ [16]) für jedes $\mathfrak{L}\in\mathfrak{M}_{i+1}$. Also gilt

$$\inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{M}_{i+1}} \max_{x\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}} p(x) \geqq k_i. \tag{5.21}$$

(5. 20) und (5. 21) ergeben schließlich (5. 19).

Wir geben nun noch ein zweites Minimaxprinzip zur Bestimmung von Eigenwerten der Schar L, begonnen beim größten Eigenwert erster Art, an. Zu diesem Zwecke definieren wir unter Beibehaltung der vorn eingeführten Bezeichnungen

$$m_i = \inf_{\mathfrak{L}\in\mathfrak{L}_i} \sup_{x\in\mathfrak{L}\setminus\{0\}} p(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots).$$

Dabei heiße m_i der *i-te Maximum-Minimum-Wert.*

Satz 5. 2 (Maximum-Minimum-Prinzip). *Es sei* $\alpha=\sup_{x\in\mathfrak{H}\setminus\{0\}} p(x)\neq\infty$, *und es existiere eine reelle Konstante* $\beta<\alpha$ *mit der Eigenschaft* $\sigma^{(1)}(L)\cap(\beta, \alpha]\subset\sigma_i^{(1)}(L)$. *Dann gilt:*

---

16) Im Beweis zu Lemma 5. 2 wurde gezeigt, daß auf jedem endlichdimensionalen Teilraum $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$ $\sup_{x\in\mathfrak{M}\setminus\{0\}} p(x)=\max_{x\in\mathfrak{M}\setminus\{0\}} p(x)$ gilt.

(1) *Jeder Maximum-Minimum-Wert* $m_n \in (\beta, \alpha]$ *ist ein Eigenwert erster Art und endlicher Vielfachheit von* L.

(2) *Jeder Punkt* $\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \cap (\beta, \alpha]$ *ist ein Eigenwert erster Art von endlicher Vielfachheit und tritt in der Menge der* m_n $(n=0, 1, \cdots)$ *seiner Vielfachheit entsprechend oft auf.*

(3) *Es sei* $m_n \in (\beta, \alpha]$. *Dann existiert ein System von* $n+1$ *linear unabhängigen Eigenelementen* $x_0, x_1, \cdots, x_n$ *mit den zugehörigen Eigenwerten* $\lambda_0 = m_0, \lambda_1 = m_1, \cdots \cdots, \lambda_n = m_n$.[17]) *Definieren wir* $\mathfrak{H}_n = \{x \in \mathfrak{H} \mid ([(m_n + \lambda_j)A + B]x_j, x) = 0 \quad (j=0, \cdots \cdots, n-1)\}$, *so gilt überdies*

(3₁) $m_n = \max\limits_{x \in \mathfrak{H}_n \setminus \{0\}} p(x)$.

(3₂) *Jedes Element* $y \in \mathfrak{H}_n$, $y \neq 0$, *mit* $p(y) = m_n$ *ist ein zu* m_n *gehöriges Eigenelement und ist außerdem linear unabhängig von den Elementen* $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$.

Beweis. Anwendung von Satz 5. 1 auf die Schar (vgl. [1])

$$L^-(\lambda) = \lambda^2 A^- + \lambda B^- + C^-$$

mit $A^- = -A$, $B^- = B$, $C^- = -C$ liefert unmittelbar die Behauptung.

6. Anwendbarkeit der Minimaxprinzipe

Der vorliegende Abschnitt gibt einige einfache hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit der Minimaxprinzipe an.

Zur Abkürzung werden wir im folgenden sagen, daß die Schar L für eine reelle Zahl $\lambda \neq \infty$[18]) der Bedingung (V_λ) genügt, wenn gilt:

(V_λ) Für jede zu λ gehörige Folge (x_n) erster Art mit $x_n \rightharpoonup x_0$ $(n \to \infty)$ gilt $Cx_n \to Cx_0$ $(n \to \infty)$.

Außerdem werden im weiteren stellenweise einige der nachstehenden Bedingungen (I_A), (I_B), (I_C) und (B) benutzt.

(I_A) (bzw. (I_B) oder (I_C)). Die Schar L sei so beschaffen, daß, falls $0 \in \sigma(A)$ (bzw. $0 \in \sigma(B)$ oder $0 \in \sigma(C)$) gilt, 0 ein isolierter Punkt des Spektrums von A (bzw. B oder C) von endlicher Vielfachheit ist.

(B) Der Operator B der Schar $L = \lambda^2 A + \lambda B + C$ sei positiv [19]) oder vollstetig.

Lemma 6. 1. *Jede der nachstehenden Bedingungen ist hinreichend für die Beschränktheit des Funktionals* p:

(1) *Die Form* (Ax, x) $(x \in \mathfrak{H})$ *ist streng indefinit.*

(2) L *genügt der Bedingung* (I_A).

---

[17]) Es sei daran erinnert, daß nach Definition $\alpha = m_0 \geqq m_1 \geqq \ldots$ gilt.

[18]) Im weiteren werden stets nur endliche reelle Zahlen betrachtet.

[19]) D. h. $(Bx, x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ (Bezeichnung: $B \geqq 0$).

Beweis. Im Falle (1) folgt die Aussage direkt aus Lemma 3. 4.

(2) L genüge der Bedingung (I_A). Angenommen, p wäre unbeschränkt, d.h., es gäbe eine Folge (x_n), $x_n \in \mathfrak{H}$, $\|x_n\| = 1$ $(n=1, 2, \cdots)$ mit

$$|p(x_n)| \geqq n \quad (n=1, 2, \cdots). \tag{6. 1}$$

Wegen (1) ist dann die Form (Ax, x) (semi-) definit. Weiter existiert nach Definition (2. 2) auf Grund von (6. 1) eine Teilfolge (x_{n_k}), für die $\lim\limits_{k\to\infty}(Ax_{n_k}, x_{n_k}) = 0$ gilt.

Aus der (beschränkten) Folge (x_{n_k}) wählen wir eine schwach konvergente Teilfolge (y_l), $y_l = x_{n_{k_l}}$ $(l=1, 2, \cdots)$: $y_l \rightharpoonup y_0$, für die wegen $\lim\limits_{l\to\infty}(Ay_l, y_l) = 0$

$$Ay_l \to 0 \quad (l \to \infty)$$

gilt, wie man durch Anwendung der wegen der Definitheit von (Ax, x) $(x \in \mathfrak{H})$ gültigen Schwarzschen Ungleichung aus

$$(Ay_l, Ay_l)^2 \leqq (Ay_l, y_l)\|A\|^3 (y_l, y_l) \qquad (l=1, 2, \cdots)$$

erkennt.

Es bezeichne nun N den Nullraum von A und R dessen orthogonales Komplement. R und N reduzieren bekanntlich A und es gilt $\mathfrak{H} = R \oplus N$; $y_l = y_l^N + y_l^R$ $(l=1, 2, \cdots)$ sei die hierzu gehörige Zerlegung von y_l. Dann folgt aus $Ay_l \to 0$ $(l \to \infty)$ wegen $Ay_l^N = 0$ $(l=1, 2, \cdots)$ die Beziehung $Ay_l^R \to 0$ $(l \to \infty)$ und auf Grund der Voraussetzung (I_A) hieraus $y_l^R \to 0$ $(l \to \infty)$. Wegen $y_l^N + y_l^R = y_l \rightharpoonup y_0$ $(l \to \infty)$ ergibt sich somit $y_l^N \rightharpoonup y_0$ und wegen der nach (I_A) endlichen Dimension von N also $y_l \to y_0$ $(l \to \infty)$, $\|y_0\| = 1$.

Infolge der Stetigkeit des Funktionals p (s. Lemma 3. 1) erhält man schließlich

$$\lim_{l\to\infty} p(x_{n_{k_l}}) = \lim_{l\to\infty} p(y_l) = p(y_0)$$

in Widerspruch zu (6. 1).

Lemma 6. 2. *Jede der folgenden beiden Bedingungen ist hinreichend dafür, daß die Schar L für jedes reelle λ der Bedingung (V_λ) genügt:*

(1) *Der Operator C ist vollstetig.*

(2) *Die Operatoren A und B sind beide vollstetig.*

Beweis. Im Falle (1) ist die Aussage evident. Bei (2) folgt wegen der Vollstetigkeit von A und B für jede Folge (x_n) erster Art mit $x_n \rightharpoonup x_0$ $(n \to \infty)$ aus $L(\lambda)x_n = (\lambda^2 A + \lambda B)x_n + Cx_n \to 0 = L(\lambda)x_0 = (\lambda^2 A + \lambda B)x_0 + Cx_0$ $(n \to \infty)$ die Beziehung $Cx_n \to Cx_0$ $(n \to \infty)$, w.z.z.w.

Lemma 6. 3. *Genügt die Schar L in einem Punkt $\lambda \neq 0$ der Bedingung (V_λ) und außerdem der Bedingung* (B), *so gilt für jede zu λ gehörige Folge (x_n) erster Art mit $x_n \rightharpoonup 0$ $(n \to \infty)$ gleichzeitig $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $Bx_n \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Beweis. Es sei (x_n) eine zu λ gehörige Folge erster Art mit $x_n \rightharpoonup 0$ $(n\to\infty)$. Dann folgt zunächst aus (V_λ)

(6. 2) $$Cx_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Der Voraussetzung (B) entsprechend unterscheiden wir zwei Fälle.

(1) B sei vollstetig. Dann gilt $Bx_n \to 0$ $(n\to\infty)$ und wegen $L(\lambda)x_n = \lambda^2 Ax_n + \lambda Bx_n + Cx_n \to 0$ $(n\to\infty)$ infolge (6. 2) und $\lambda \neq 0$ schließlich $Ax_n \to 0$ $(n\to\infty)$, w.z.z.w.

(2) B sei positiv. Wir betrachten die nach (2. 2) gültige Beziehung

(6. 3) $$[(Bx_n, x_n) + d(x_n)]p(x_n) = -2(Cx_n, x_n).$$

Da aus (6. 2) wegen $\|x_n\| = 1$ $(n=1, 2, \cdots)$ die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n, x_n) = 0$ folgt, liefert (6. 3) auf Grund von $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = \lambda \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} [(Bx_n, x_n) + d(x_n)] = 0$$

und somit wegen $B \geqq 0$ und $d(x_n) > 0$ $(n=1, 2, \cdots)$

$$\lim_{n\to\infty} (Bx_n, x_n) = 0.$$

Infolge $B \geqq 0$ ergibt sich hieraus

$$Bx_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Wie in (1) erhält man nun $Ax_n \to 0$ $(n\to\infty)$, w.z.z.w.

Lemma 6. 4. *Die Schar L genüge für eine reelle Zahl λ der Bedingung* (V_λ). *Ferner gelte* (B). *Ist dann (x_n) eine zu λ gehörige Folge erster Art mit $x_n \rightharpoonup x_0 \neq 0$ $(n\to\infty)$, so gilt $p(x_0) = \lambda$.*

Beweis. Wir vermerken zunächst, daß aus $x_n \rightharpoonup x_0$ $(n\to\infty)$ die Beziehung $L(\lambda)x_n \rightharpoonup L(\lambda)x_n$ $(n\to\infty)$ folgt und somit wegen $L(\lambda)x_n \to 0$ die Gleichung

$$L(\lambda)x_0 = 0$$

gilt. Daher genügt es auf Grund von Lemma 2. 3, zum Beweis von $p(x_0) = \lambda$ die Gültigkeit der Ungleichung

(6. 4) $$2\lambda(Ax_0, x_0) + (Bx_0, x_0) \geqq 0$$

zu zeigen. (B) entsprechend unterscheiden wir hierzu zwei Fälle.

(1) Es sei $B \geqq 0$.

(a) Im Falle $\lambda = 0$ gilt offenbar (6. 4).

(b) Es sei $\lambda \neq 0$. Wir setzen ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß die offenbar beschränkte Zahlenfolge $((Bx_n, x_n))$ konvergiert.

Aus $L(\lambda)x_n \to L(\lambda)x_0 = 0$ folgt, da wegen (V_λ) $Cx_n \to Cx_0$ $(n\to\infty)$ gilt, die Beziehung $\lambda^2 Ax_n + \lambda Bx_n \to \lambda^2 Ax_0 + \lambda Bx_0$ $(n\to\infty)$ und unter Beachtung von $\lambda \neq 0$ somit

$$2\lambda Ax_n + 2Bx_n \to 2\lambda Ax_0 + 2Bx_0 \qquad (n\to\infty).$$

Deshalb ergibt sich auf Grund der Relationen $x_n \rightharpoonup x_0$ $(n\to\infty)$ und $\lim_{n\to\infty} 2(\lambda-p(x_n))(Ax_n, x_n)=0$

$$\lim_{n\to\infty} [2p(x_n)(Ax_n, x_n)+2(Bx_n, x_n)] = 2\lambda(Ax_0, x_0)+2(Bx_0, x_0).$$

Mit $f_{p(x_n)}(x_n)=2p(x_n)(Ax_n, x_n)+(Bx_n, x_n)$ erhält man so

$$2\lambda(Ax_0, x_0)+(Bx_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} f_{p(x_n)}(x_n)+\lim_{n\to\infty} (Bx_n, x_n)-(Bx_0, x_0). \tag{6.5}$$

Weiter gilt, weil aus $x_n \rightharpoonup x_0$ die Beziehung $\lim_{n\to\infty}(Bx_n, x_0)=(Bx_0, x_0)$ folgt, infolge $B\geqq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (Bx_n, x_n)-(Bx_0, x_0) &= \lim_{n\to\infty} [(Bx_n, x_n)-(Bx_n, x_0)-(Bx_0, x_n)+(Bx_0, x_0)] = \\ &= \lim_{n\to\infty} (B(x_n-x_0), (x_n-x_0)) \geqq 0.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Nun ist nach (2. 9) $f_{p(x_n)}(x_n)>0$. Somit liefern (6. 5) und (6. 6) die Ungleichung (6. 4), w.z.z.w.

(2) B sei vollstetig. Dan ist

$$Bx_n \to Bx_0 \qquad (n\to\infty). \tag{6.7}$$

(a) Gilt $\lambda=0$, so folgt aus der nach (2. 9) gültigen Ungleichung $f_{p(x_n)}(x_n)= =2p(x_n)(Ax_n, x_n)+(Bx_n, x_n)>0$ wegen der Beziehungen $\lim_{n\to\infty} p(x_n)=\lambda=0$, $|(Ax_n, x_n)|\leqq\|A\|$ $(n=1, 2, \cdots)$ und $\lim_{n\to\infty}(Bx_n, x_n)=(Bx_0, x_0)$ die Ungleichung

$$(Bx_0, x_0) = \lim_{n\to\infty} f_{p(x_n)}(x_n) \geqq 0,$$

also (6. 4).

(b) Es sei $\lambda\neq 0$. Wie in (1) gelangt man zu (6. 5). Daraus folgt auf Grund von (6. 7) $\lim_{n\to\infty} f_{p(x_n)}(x_n)=2\lambda(Ax_0, x_0)+(Bx_0, x_0)$. Wieder gilt (6. 4) wegen $f_{p(x_n)}(x_n)>0$.

Lemma 6. 5. *Es sei $\lambda\in\sigma^{(1)}(L)$. Ferner gelte für die Schar L die Bedingung* (B).

(1) *Genügt L im Punkte λ der Bedingung* (V_λ) *und erfüllt L außerdem die Bedingung* (I_C), *so gilt $\lambda\in\sigma_i^{(1)}(L)$.*

(2) *Ist $\lambda\neq 0$ und genügt L neben der Bedingung* (V_λ) *wenigstens einer der Bedingungen* (I_A) *oder* (I_B), *so gilt $\lambda\in\sigma_i^{(1)}(L)$.*

Beweis. Wegen $\lambda\in\sigma^{(1)}(L)$ existiert eine zu λ gehörige Folge erster Art (y_m), die infolge $\|y_m\|=1$ $(m=1, 2, \cdots)$ eine schwach konvergente Teilfolge (x_n) mit $x_n \rightharpoonup x$ $(n\to\infty)$ enthält.

Angenommen, es wäre $\lambda\notin\sigma_i^{(1)}(L)$. Dann ergäbe sich wegen Lemma 6. 4 $x=0$, d. h. $x_n \rightharpoonup 0$ $(n\to\infty)$.

Fall (1). Aus (V_λ) folgte nunmehr $Cx_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dies steht aber nach dem auf Seite 51 zitierten Kriterium von H. WEYL im Widerspruch zur Bedingung (I_C).

Fall (2). Aus Lemma 6. 3 erhielte man dann sowohl $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$ als auch $Bx_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dies ist wieder nach dem Kriterium von H. WEYL zu (I_A) bzw. (I_B) im Widerspruch.

Wir können nun die Minimaxprizipe auf spezielle Scharen anwenden.

Satz 6. 1. *Die Schar $L = \lambda^2 A + \lambda B + C$ genüge den (auf Seite 42 bzw. 62 genannten) Voraussetzungen* (D^+), (B) *und* (I_A). *Ferner sei der Operator C vollstetig. Dann sind die Sätze* 5. 1 *und* 5. 2 *mit $\beta = 0$ anwendbar und es ergibt sich:*

Die Menge $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen isolierten Punkten, die sich nur im Nullpunkt häufen können, und jedes $\lambda \in \sigma^{(1)}(L)$ mit $\lambda \neq 0$ ist ein Eigenwert erster Art von endlicher Vielfachheit.

Gilt $C \neq 0$, so ist $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{0\} \neq \emptyset$; das Minimum-Maximum-Prinzip (*Satz* 5. 1) *liefert dann alle negativen und das Maximum-Minimum-Prinzip* (*Satz* 5. 2) *alle positiven Eigenwerte erster Art von L.*

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung des Satzes folgt aus Lemma 6. 1 $\inf_{x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}} p(x) \neq \infty$, $\sup_{x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}} p(x) \neq \infty$ und aus Lemma 6. 5, (2), mittels Lemma 6. 2, (1), $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{0\} \subset \sigma_i^{(1)}(L)$. Daher sind die Voraussetzungen zu den Sätzen 5. 1 und 5. 2 mit $\beta = 0$ erfüllt. Hieraus folgen alle übrigen Aussagen des Satzes, wobei man beim Beweis von $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ im Falle $C \neq O$ beachte, daß dann entweder $k_0 = \inf_{x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}} p(x) < 0$ oder $m_0 = \sup_{x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}} p(x) > 0$ gilt.

Satz 6. 2. *Die Schar $L = \lambda^2 A + \lambda B + C$ genüge den (auf Seite 42 bzw. 62 genannten) Bedingungen* (D^+) *und* (I_C). *Ferner seien die Operatoren A und B vollstetig, und es gelte $A \neq O$. Existiert dann ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $(Ax, x) > 0$, so ist Satz* 5. 1 *und andernfalls Satz* 5. 2 *mit unendlichem β anwendbar. Dabei ergibt sich:*

Gilt $\dim \mathfrak{H} = n < \infty$, *so besteht $\sigma^{(1)}(L)$ aus endlich vielen Eigenwerten, zu denen ein System von genau n linear unabhängigen Eigenelementen erster Art gehört.*

Ist $\mathfrak{H}$ unendlichdimensional, so besteht $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{\infty\}$ aus genau abzählbar vielen isolierten Punkten, die sich nur gegen ∞ häufen. Jedes $\lambda \in \sigma^{(1)}(L) \setminus \{\infty\}$ ist ein Eigenwert erster Art von endlicher Vielfachheit. Der Operator A ist dann positiv oder negativ.

Beweis. Wir vermerken zunächst, daß nach Voraussetzung für L die Bedingung (B) gilt und somit das Lemma 6. 5 angewendet werden kann.

(1) Es existiere ein $x \in \mathfrak{H}$ mit $(Ax, x) > 0$. Dann folgt aus (3. 3) $\inf_{x \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}} p(x) \neq \infty$ und wegen Lemma 6. 2, (2) aus Lemma 6. 5, (1), $\sigma^{(1)}(L) \setminus \{\infty\} \subset \sigma_i^{(1)}(L)$. Daher sind die Voraussetzungen zu Satz 5. 1 mit unendlichem β erfüllt, woraus die Aussagen des Satzes folgen, wenn man beachtet, daß $p(x)$ und somit alle Minimum-Maximum-Werte k_n $(n = 0, 1, \cdots)$ nur endliche Werte annehmen.

Im Falle unendlicher Dimension von $\mathfrak{H}$ ergibt sich aus der Häufung von $\sigma^{(1)}(L)\setminus\{\infty\}$ gegen ∞ die Unbeschränktheit von p und daher nach Lemma 6. 1, (1), die Definitheit der Form (Ax, x) $(x\in\mathfrak{H})$; also ist A entweder positiv oder negativ.

(2) Existiert kein $x\in\mathfrak{H}$ mit $(Ax, x)>0$, so gibt es wegen $A\neq O$ ein $y\in\mathfrak{H}$ mit $(Ay, y)<0$. (3. 4) liefert dann $\sup\limits_{x\in\mathfrak{H}\setminus\{0\}} p(x)\neq\infty$. (1) entsprechend zeigt man, daß jetzt Satz 5. 2 anwendbar ist, w.z.z.w.

Folgerung. *Die Schar L genüge den Bedingungen* (D^+) *und* (I_A). *Ferner seien die Operatoren B und C vollstetig, und es sei $B\geqq O$, $C\neq O$. Dann gilt:*

Ist $\dim\mathfrak{H}=n<\infty$, *so besteht $\sigma^{(2)}(L)$ aus endlich vielen Eigenwerten, zu denen ein System von genau n linear unabhängigen Eigenelementen zweiter Art gehört.*

Besitzt $\mathfrak{H}$ unendliche Dimension, so besteht $\sigma^{(2)}(L)\setminus\{0\}$ aus genau abzählbar vielen isolierten Punkten, die sich nur gegen 0 *häufen. Jedes $\lambda\in\sigma^{(2)}(L)\setminus\{0\}$ ist ein Eigenwert zweiter Art von endlicher Vielfachheit. Der Operator C ist dann positiv oder negativ.*

Beweis. Wir ordnen der Schar L entsprechend Lemma 3. 6, (2), (bzw. Lemma 4. 2) die Schar $\tilde{L}_0(\lambda)=\lambda^2\tilde{A}_0+\lambda\tilde{B}_0+\tilde{C}_0$ mit $\tilde{A}_0=C$, $\tilde{B}_0=B$, $\tilde{C}_0=A$ zu. Offenbar erfüllt $\tilde{L}_0$ die Bedingungen (D^+), $(I_{\tilde{C}_0})$ und genügt daher wegen $\tilde{A}_0=C\neq O$ und auf Grund der Vollstetigkeit von $B=\tilde{B}_0$, $C=\tilde{A}_0$ den Voraussetzungen zu Satz 5. 2, der dann unter Benutzung von Lemma 4. 2 die Behauptung liefert.

An dieser Stelle sei nochmals auf die bereits zitierten Arbeiten [1] und [2] hingewiesen. In [1] wird in einem endlichdimensionalen Raum die Schar L unter der Bedingung (D) und der zusätzlichen Voraussetzung $(Bx, x)\geqq 0$ $(x\in\mathfrak{H})$ betrachtet; in [2] werden u.a. stark gedämpfte Scharen untersucht, die sich durch eine Parametertransformation auf diesen Fall zurückführen lassen. Stets genügt hierbei die Schar L der Bedingung (D^+). Wegen der endlichen Dimension von $\mathfrak{H}$ sind auch die übrigen Voraussetzungen zu den Sätzen 6. 1 und 6. 2 erfüllt. Wir erhalten so als Spezialfall die in [1] bewiesenen Aussagen.

Literatur

[1] R. J. Duffin, A minimax theory for overdamped networks, *J. Rat. Mech. and Anal.*, **4** (1955), 221—233.

[2] R. J. Duffin, The Rayleigh—Ritz method for dissipative or gyroscopic systems, *Quarterly J. Appl. Math.*, **18** (1960), 215—221.

[3] M. G. Krein u. H. Langer, Zur Theorie quadratischer Scharen selbstadjungierter Operatoren, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **154** (1964), 1258—1261 [russisch].

[4] M. G. Krein u. H. Langer, Über einige mathematische Prinzipien der linearen Theorie kleiner Schwingungen der Kontinua, *Arbeiten des intern. Symp. über Anwendungen der Funktionentheorie i. d. Kontinuumsmechanik* (Moskau, 1965) [russisch].

[5] R. Kühne, Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.*, **154** (1964), 56—69.

[6] P. H. Müller, Eine neue Methode zur Behandlung nichtlinearer Eigenwertaufgaben, *Math. Zeitschr.*, **70** (1959), 381—406.

[7] P. H. Müller, Eigenwertabschätzungen für Gleichungen vom Typ $(\lambda^2 I - \lambda A - B)x = 0$, *Archiv d. Math.*, **12** (1961), 307—310.

[8] E. Pesonen, Über die Spektraldarstellung quadratischer Formen in linearen Räumen mit indefiniter Metrik, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* A I, **227** (1956).

[9] F. Riesz u. B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (Berlin, 1956).

[10] A. C. Zaanen, *Linear analysis* (Amsterdam, 1953).

(Eingegangen am 10. April 1967)